

ППМГ „АКАД. НИКОЛА ОБРЕШКОВ“
V ППМГ БУРГАС CHALLENGE

Състезание по математика, 10 юни 2023 г.

Тема за 7-8 клас

Задача 1. Даден е изразът $A = x^2 + 5x + 15$, където x е реално число.

а) Да се реши неравенството $A < (x + 4)^2$.

б) За кои естествени числа x изразът A е точен квадрат?

Задача 2. На територия има 2022 града. Някои от градовете са свързани с двупосочни международни пътища, като всеки международен път е между точно два града и има най-много един международен път между всеки два града. Всеки от градовете принадлежи на една държава, като във всяка държава има поне един град и няма международен път между два града от една и съща държава. Ако държавите са 3 на брой, какъв е най-големият възможен брой на всички международни пътища?

Задача 3. Четириъгълникът $ABCD$ с $AB = AD$ е вписан в окръжност с център O . Точката M е средата на диагонала AC и правата OM пресича страните CD и CB съответно в точките P и Q . Отсечките AS и AT са диаметри съответно в окръжностите, описани около триъгълниците AOD и AOB . Да се докаже, че правите PS и QT се пресичат върху правата AC .

Задача 4. Даден е бял квадрат със страна 2^n , където n е цяло неотрицателно число. На всеки ход можем или да разделим бял квадрат на четири бели части чрез двете прави през средите, успоредни на страните му (стига обаче белият квадрат да е с дължина на страната поне 2), или да оцветим бял квадрат в един от цветовете синьо, зелено, червено и жълто. Накрая не може да има бяла част. Нека A_n е броя на всички различни таблици, които можем да получим (таблиците, които могат да се получат една от друга чрез завъртане или обръщане, са различни). Да се намерят всички n , за които A_n може да се представи във вида $p^a \cdot q^b$, където p и q са прости числа, не непременно различни, а a и b са естествени числа.

*Време за работа – 4 часа и 30 минути.
Всяка задача се оценява с 10 точки.*

Журито Ви пожелава успех!