

ППМГ „АКАД. НИКОЛА ОБРЕШКОВ“
V ППМГ БУРГАС CHALLENGE

Състезание по математика, 10 юни 2023 г.

Тема за 9-12 клас, първи ден

Задача 1. Да се намерят всички функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, такива че

$$f(f(x + f(x)) + y + f(y)) = 2x + 2f(y)$$

за всички реални числа x и y .

Задача 2. Вписаната в триъгълника ABC окръжност ω с център I допира страните AB , BC и AC съответно в точки C_1 , A_1 и B_1 . Нека X, Y, Z и T са средите съответно на отсечките AB_1, AC_1, BC_1 и BA_1 . Правите XY и ZT се пресичат в точка K . Да се докаже, че описаната около триъгълника ABK окръжност се допира до ω .

Задача 3. Даден е прост ориентиран граф с 1001 върха, първоначално без ребра. Галин и Марин играят следната игра. Първо Марин избира естествено число A и го дава на Галин, след което Галин построява ориентирани ребра в графа, така че броят на подграфите с 1001 върха, в които всеки връх е от входяща степен 1, е поне A . Ако такъв граф е невъзможно да се построи, то Галин печели. След като Галин построи графа, Марин печели, ако в графа има Хамилтонов цикъл, а в противен случай печели Галин. Кой има печеливша стратегия?

(В прост ориентиран граф между всеки два върха има най-много едно ребро. Входяща степен на връх v в ориентиран граф е броят на ребрата от вида \vec{uv} , където u е връх на графа. Цикъл в ориентиран граф е Хамилтонов, ако свързва всеки връх точно по веднъж.)

Време за работа – 4 часа и 30 минути.
Всяка задача се оценява със 7 точки.

Журито Ви пожелава успех!