ППМГ „АКАД. НИКОЛА ОБРЕШКОВ“
IV ППМГ БУРГАС CHALLENGE

Състезание по математика, 21-22 май 2022 г.

Решения на задачите

Задача 5.1. Поставете числата от 5 до 14 в клетките на дадената таблица така, че сумата на числата във всички домина да е различно число („домино“ ще наричаме фигура, която се състои от две клетки с обща страна).

Решение. Възможен пример е показан на картинката:

5	6	8	11
7	9	12	
10	13	14	

Оценяване: 6 т. за работещ пример.

Задача 5.2. Даден е успоредник $ABCD$. Точка M е вътрешна за $\triangle ABD$. Лицата на $\triangle ABM$ и $\triangle BCM$ са съответно 10 кв. см и 17 кв. см. Колко кв. см. е лицето на $\triangle BDM$?

Решение.
Нека ME е височина в триъгълник ABM, а MF е височина в триъгълник CDM. Тогава

$$S_{ABM} + S_{CDM} = \frac{AB \cdot ME}{2} + \frac{AB \cdot MF}{2} = \frac{AB \cdot EF}{2} = \frac{S_{ABCD}}{2}.$$

По аналогичен начин можем да покажем, че

$$S_{BCM} + S_{ADM} = \frac{S_{ABCD}}{2}.$$

Нека лицето на $\triangle ADM$ е x кв. см. Тогава $S_{BCM} + S_{ADM} = x + 17$, следователно лицето на успоредника е $2x + 34$ кв. см. Така намираме, че $S_{CDM} = \frac{S_{ABCD}}{2} - S_{ABM} = x + 7$ кв. см. Следователно, лицето на четириъгълника $BMDC$ е $S_{BMDC} = S_{BMC} + S_{CMD} = x + 24$ кв. см.

От друга страна, $S_{BMDC} = S_{BCD} + S_{BDM}$, като $S_{BCD} = \frac{S_{ABCD}}{2} = x + 17$, тоест $S_{BDM} = S_{BMDC} - S_{BCD} = x + 24 - (x + 17) = 7$ кв. см.

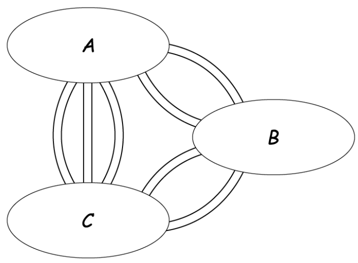
Оценяване: 3 т. за формулите $S_{BCM} + S_{ADM} = S_{ABM} + S_{CDM} = \frac{S_{ABCD}}{2}$; 2 т. за полагането $S_{ADM} = x$ кв. см. и намирането на S_{BMDC}; 1 т. за намирането на S_{BDM}.

Задача 5.3. Дадена е дробта $\frac{2}{3}$. Разрешено е или да увеличаваме числителя на дробта с 2022, или да увеличаваме знаменателя на дробта с 2021. Възможно ли е в някакъв момент да получим дроб, равна на дробта $\frac{3}{5}$?

Решение. Да забележим, че за да получим дроб, която е равна на дробта $\frac{3}{5}$, трябва да получим съкратима дроб, в която числителят е 3 пъти по-голям от някакво число,

а знаменателят е 5 пъти по-голям от същото число. Това ни показва, че числителят трябва да се дели на 3. От друга страна, ако към 2 прибавяме числото 2022 (число, кратно на 3), няма как да се получи число, което се дели на 3. Следователно, няма как да получим дроб, която да е равна на $\frac{3}{5}$ с дадените ни ходове.
Оценяване: 3 т. за отбелязване, че числителят трябва да е кратен на три; 4 т. за отбелязване, че това не може да се постигне.

Задача 5.4. Дадена е карта на три острова A, B, C, както и пътищата между тях. Остров A има 100 жители, остров B има 125 жители, а остров C има 77 жители. От време на време, на някой остров се извършва преселение: по всеки мост, излизащ от този остров, се мести по един човек към съседен остров. Възможно ли е след някакво време на остров A да има 77 жители, на остров B да има 125 жители, а на остров C да има 100 жители?



Решение. Да допуснем, че е възможно, и ще стигнем до противоречие. Да разгледаме трите случая за преселение. Ако то се случва на остров A, то 5 души напускат остров A, 3 души пристигат в C и 2 души пристигат в B. Ако преселението се случва на остров B, то 4 жители напускат B и по двама жители пристигат във всяко от A и C. Ако преселението се случва на остров C, то 5 жители напускат C, 2 жители пристигат в B и 3 пристигат в C. Нека x, y, z са броят на преселенията от A, B, C съответно. Жителите на остров B са 125 в началото и след всичките преселения отново са 125. Това ни дава уравнението

$$125 + 2x - 4y + 2z = 125,$$

което можем да опростим до $x + z = 2y$. Разглеждайки по подобен начин населенията на A и на C, можем да получим съответните уравнения:

$$100 - 5x + 2y + 3z = 77,$$

$$77 + 5x + 2y + 3z = 100.$$

Замествайки $2y = x + z$ в първото уравнение, получаваме $100 - 4x + 4z = 77$, което можем да запишем във вида $4(25 - x + z) = 77$. Тъй като $25 - x - z$ е цяло число, лявата част на уравнението се дели на 4. Но дясната част – числото 77 – очевидно не е кратна на 4, противоречие. Затова не е възможно на остров A да има 77 жители, на остров B да има 125 жители, а на остров C да има 100 жители.
Оценяване: 4 т. за съставянето на уравненията, описващи населението на всеки остров след определен брой преселения; 3 т. за показване, че тези уравнения не могат да се изпълнят.

Задача 6.1. Митичната Многолика ламя има три глави. Ако изяде юнак, ѝ порастват нови шест глави. Ако пийне вода, ѝ порастват нови девет глави. Ако спи в продължение на десет години, тогава ѝ порастват нови 20 глави. Многоликата ламя не може да губи глави. Кое е най-голямото естествено число, което не може никога да бъде брой на главите на Многоликата ламя?

Решение. Броят на главите на Многоликата ламя не може да бъде 46 – ако е спала точно нула или един пъти, то останалият брой глави не се дели на 3, значи не може да се получи от ядене на юнаци и пиене на вода. От друга страна, ако е спала поне два пъти, то останалият брой глави е твърде малък, за да бъде постигнат.

Сега уравненията

$$47 = 3 + 6 + 9 + 9 + 20,$$

$$48 = 3 + 5 \cdot 9,$$

$$49 = 3 + 6 + 20 + 20,$$

$$50 = 3 + 3 \cdot 9 + 20,$$

$$51 = 3 + 6 + 6 + 4 \cdot 9,$$

$$52 = 3 + 9 + 20 + 20$$

показват, че числата $47, 48, \ldots, 52$ са възможен брой глави, а всяко следващо число може да бъде получено чрез изяждане на юнак. Съответно отговорът е 46.
Оценяване: 3 т. за доказване, че броят глави не може да бъде 46; 3 т. за доказване, че това е минималният брой глави, които не могат да се постигнат.

Задача 6.2. Даден е успоредник $ABCD$. Точка K лежи на страната AD, а точките L и M лежат на отсечката BK, като точка M е между B и L. Ако знаем, че $BK = 24\,\mathrm{cm}$, $8S_{KLC} = 3S_{ABK} + 3S_{DKC}$ и $8S_{MBC} = S_{ABCD}$, намерете дължината на отсечката ML.

Решение. Да означим $S_{ABCD} = S$. Тогава $S_{BCK} = \frac{1}{2}S$, понеже двете фигури имат една и съща основа BC с една и съща височина към нея. От условието следва, че $S_{KLC} = \frac{3}{16}S$ и $S_{LMC} = S_{BCK} - S_{KLC} - S_{MBC} = \frac{1}{2}S - \frac{3}{16}S - \frac{1}{8}S = \frac{3}{16}S$.
Но $\triangle MCL$ и $\triangle BCK$ споделят една и съща височина от върха C, следователно отношението на лицата им е $\frac{S_{MCL}}{S_{BCK}} = \frac{ML}{BK}$. Замествайки лицата на двата триъгълника и използвайки дължината на страната BK, получаваме

$$LM = \frac{S_{LMC}}{S_{KBC}} BK = \frac{3/16}{1/2} \cdot 24\,\mathrm{cm} = 9\,\mathrm{cm}.$$

Оценяване: 3 т. за намиране на изразяване на лицата S_{LMC} и S_{KBC} чрез лицето на успоредника. 3 т. за формулата $\frac{S_{LMC}}{S_{KBC}} = \frac{LM}{KB}$ и намирането на дължината на LM чрез нея.

Задача 6.3. Числата $1, 2, 3, \ldots, 200$ са разпределени върху окръжност в някакъв ред. За всяко естествено число $n > 1$, сред 99-те числа, които стоят след него по часовниковата стрелка, се срещат точно толкова от числата $1, 2, \ldots, n-1$, колкото се срещат и в 99-те числа преди n по часовниковата стрелка. Намерете кое число стои срещу числото 111.

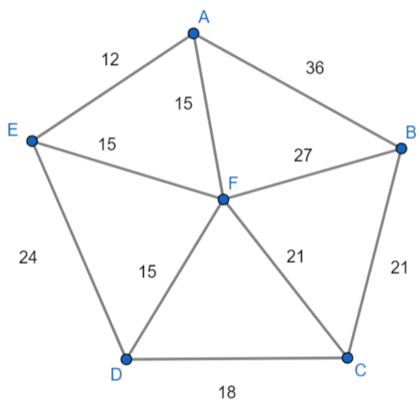
Забележка: Винаги има едно число, което не попада в нито една от двете групи от 99 числа.

Решение. Да забележим, че за дадено n числото, което не попада в нито едната от двете групи, е числото, което стои точно срещу n. Да разгледаме даденото свойство за $n = 2$. То ни показва, че числото 1 не се намира сред 99-те числа, които стоят след 2 по часовниковата стрелка, нито в 99-те числа преди 2 по часовниковата стрелка. Следователно числата 1 и 2 стоят точно едно срещу друго. Сега, да разгледаме свойството за $n = 4$. Тъй като 1 и 2 стоят едно срещу друго, всяко от тях участва в точно една от двете групи за $n = 4$, а щом тези две групи съдържат равен брой числа измежду 1, 2, 3, то 3 трябва да стои срещу 4.

Можем да обобщим тези наши разсъждения, като докажем, че за всяко четно число n, числата n и $n-1$ стоят едно срещу друго. Ще докажем това твърдение по индукция. Вече разгледахме случая $n = 2$. Да допуснем, че индукционната хипотеза е изпълнена за $2, 4, \cdots, n$. Да разгледаме даденото свойство за числото $n+2$. Всяка от двете групи преди и след $n-2$ съдържа точно по едно число от всяка двойка $(1,2), (3,4), \ldots, (n-1,n)$, защото всяка двойка съдържа числа, които стоят едно срещу друго. По условие всяка от двете групи съдържа по равен брой числа от редицата $1, 2, \ldots, n+1$. Затова $n+1$ не трябва да бъде в нито едната от двете групи, т.е. числото $n+1$ стои точно срещу $n+2$. Така индукционната ни хипотеза е вярна за всяко четно число n. С това доказваме, че срещу числото 111 може да стои само числото 112.

Оценяване: 1 т. за разписване на случаите $n = 2$ и $n = 4$; 5 т. за доказателство, че срещу всяко четно число n стои числото $n-1$; 1 т. за завършване на решението.

Задача 6.4. На дадената карта са изобразени шест населени места и пътищата между тях. До всеки път е указана неговата дължина в километри. От град A тръгнал автобус, който пътувал точно 3333 км и се озовал обратно в град A (като при пътуването също може да преминава през A). Докажете, че автобусът е минал през пътя между B и C поне веднъж.



Решение. Да допуснем, че автобусът е изминал 3333 км без да минава през пътя между B и C. Забелязваме, че маршрутът на този автобус притежава следното свойство: ако се намира в някое от населените места A, B, C, D, E, то той е изминал четен брой километри до този момент, а ако се намира в населеното място F, то той е изминал нечетно число километри.

Наистина, в началото на пътешествието си, автобусът се е намирал в A и е изминал точно 0 км, т.е. свойството е изпълнено. Ако автобусът пътува между някое от населените места A, B, C, D, E, то маршрутът на автобуса се увеличава с четно число километри. От друга страна, ако автобусът се придвижва към населено място F или от него, то дължината на изминатия път се увеличава с нечетно число и следователно обръща четността си. И така, ако нашето свойство е изпълнено докато автобусът се намира в някое населено място, то ще бъде и изпълнено и при пристигането му в следващото населено място.

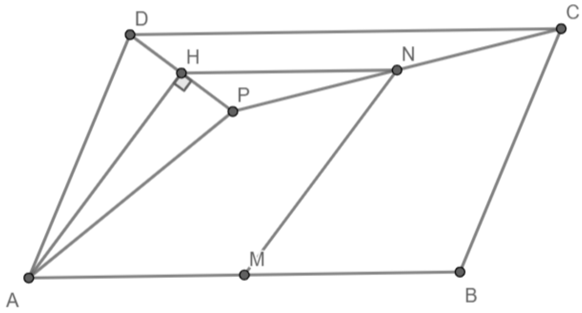
Така заключаваме, че ако автобусът не е минал през пътя BC, няма как да се е завърнал в A след като е изминал точно 3333 км.
Оценяване: 1 т. за формулиране на свойството при допускането, че автобусът не минава през пътя BC; 5 т. за доказателство на това свойство; 1 т. за завършване на решението.

Задача 7-8.1. В училище била проведена много трудна контролна по математика. Една трета от всички ученици и още 20 ученици получили двойка, една четвърт от всичи ученици и още 30 получили тройка, а има поне един ученик, който е изкарал четворка. Вярно ли е, че е задължително броят на двойкаджиите да е повече от този на тройкаджиите?

Решение. Да забележим, че количеството ученици се дели на 3 и на 4, а значи и на 12. Да означим общото количество ученици с $12m$. Тогава двойка са получили $4m + 20$ ученици, а тройка са получили $3m + 30$. Броят на останалите ученици е $12m - (4m + 20) - (3m + 30) = 5m - 50$, и тъй като имаме поне един ученик с четворка, то този брой е ненулев. Затова в сила е неравенството $5m - 50 > 0$, т.е. $m > 10$. Разликата между броят на двойкаджиите и броят на тройкаджиите е точно $m - 10$, следователно е задължително двойкаджиите да са повече.
Оценяване: 1 т. за доказване, че броят на учениците се дели на 12; 3 т. за доказване, че броят ученици е поне 120; 2 т. за доказване, че е задължително броят на двойкаджиите да е повече.

Задача 7-8.2. Даден е успоредник $ABCD$. Точка P е вътрешна за успоредника, като е изпълнено равенството $AP = AD$. Точките M и N са съответно средите на отсечките AB и CP. Докажете, че правите DP и MN са перпендикулярни.

Решение. Да дефинираме точка H като средата на отсечката DP. Отсечката NH е средна отсечка в $\triangle PCD$, следователно $HN \parallel CD \parallel AB$ и $HN = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}AB$. Тогава $HN = AM$ и $HN \parallel AM$, откъдето следва, че четириъгълникът $AMNH$ е успоредник. Затова $AH \parallel MN$ като срещуположни страни в успоредника. От друга страна, AH е медиана в равнобедрения триъгълник ADP към основата PD, следователно $AH \perp PD$. Тъй като $AH \parallel MN$, можем да заключим, че $MN \perp DP$, което и трябваше да се докаже.
Оценяване: 1 т. за построяване на точката H; 3 т. за доказване, че $AMHN$ е успоредник; 2 т. за доказателство, че $AH \perp PD$ и завършване на решението.



Задача 7-8.3. Стефан разполага с 2022 естествени числа $a_1, a_2, \ldots, a_{2022}$. Той решил да запише върху окръжност техните квадрати $a_1^2, \ldots, a_{2022}^2$ и забелязал, че сумата на всеки 47 последователни числа върху окръжността се дели на 47^2. Възможно ли е някое от числата $a_1, a_2, \ldots, a_{2022}$ да не се дели на 47?

Решение. Нека да означим с S сумата $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{2022}^2$. Да забележим, че 47^2 дели всяка от сумите $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{47}^2$, $a_{48}^2+a_{49}^2+\cdots+a_{94}^2$, $\ldots$, $a_{1975}^2+a_{1976}^2+\cdots+a_{2021}^2$, следователно дели и тяхната сума, която е $a_1^2+a_2^2+\cdot+a_{2021}^2 = S-a_{2022}^2$. Следователно, $S \equiv a_{2022}^2 \pmod{47^2}$. Аналогично можем да заключим, че $S \equiv a_n^2 \pmod{47^2}$ е в сила за всяко $n = 1, 2, \ldots, 2022$. Тогава $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{47}^2 \equiv 47S \pmod{47^2}$, но понеже 47^2 дели тази сума по условие, то 47^2 дели $47S$, от което следва, че 47 дели S. От друга страна, за всяко $n = 1, 2, \ldots, 2022$ е в сила че 47^2 дели $S - a_n^2$, следователно 47 дели a_n^2. Тъй като 47 е просто число, можем да заключим, че то дели a_n за всяко $n = 1, 2, \ldots, 2022$, т.е. задължително е всички числа на Стефан да се делят на 47.
Оценяване: 3 т. за доказване, че $S \equiv a_n^2 \pmod{47^2}$ е в сила за всяко $n = 1, 2, \ldots, 2022$; 3 т. за доказаване, че 47 дели S; 1 т. за завършване на решението.

Задача 7-8.4. Гаго разполага с редица от 100 клетки, като във всяка от тях е разположено едно камъче. Гаго може да плати 1 лев и да размени две съседни камъчета. Освен това, той може безплатно да размени две камъчета, между които има точно три други камъчета. Колко е най-малката възможна сума, която може да заплати Гаго, за да пренареди камъчетата в обратен на първоначалния ред?

Решение. Ще докажем, че най-малката възможна сума е 50 лева. Нека номерираме клетките в таблицата от 1 до 100, и нека номерираме камъчетата с числата от 1 до 100 според първоначалната им клетка. За да постигне крайната си цел, Гаго трябва да премести всяко камъче от клетката с номер n в клетката с номер $101 - n$. Да забележим, че тези две клетки са с различна четност. От друга страна, ако върху камъче бъде приложена безплатната операция, то камъчето ще се озове върху клетка със същата четност. Следователно, всяко камъче трябва да участва поне веднъж в платена размяна. Тъй като платеният ход разменя две камъчета, Гаго трябва да направи поне $100/2 = 50$ платени размени, т.е. той винаги трябва да плати поне 50 лева, за да постигне целта си.

Сега ще покажем начин Гаго да пренареди камъчетата в обратен на първоначалния ред с точно 50 платени размени. Да забележим, че всяка безплатна размяна премества камъче в клетка, която дава същия остатък при деление на 4 като старата клетка. Гаго може да направи следните 49 платени размени: 2-3, 4-5, 6-7, 8-9,

…, 98-99. След това ще премести камъче 1 на клетка 5 с една безплатна операция, а после ще премести камъче 100 на клетка 4 с 24 безплатни операции. Последния лев Гаго ще използва за да размени камъчетата 100 и 1, които преди това са били на клетки 4 и 5 съответно. След тези размени, всяко камъче с номер n стои върху клетка, която дава същия остатък при деление на 4 като клетката $101 - n$, която трябва да достигне. Тогава Гаго може да използва безплатни ходове за да пренареди камъчетата в ред, който е обратен на първоначалния.
Оценяване: 3 т. за доказване, че Гаго трябва да плати поне 50 лева; 3 т. за представяне на пример, в който 50 лева са достатъчни; 1 т. за завършване на решението.

Задача 9-12.1. В таверната „Златният сандък“ са седнали няколко пирати, като някои от тях пият ром, а други – бренди. Средната възраст на пиещите бренди е 47, а средната възраст на пиещите ром е 23. Когато пиратът Едуард решава да изпие бутилката си с бренди и да си поръча бутилка ром, двете средни възрасти – тази на пиещите ром и тази на пиещите бренди – се увеличили с 2 години. Ако никой друг не е променил избора си на питие, намерете колко пирати има в таверната.

Решение. Да означим с x броя на пиратите, пиещи ром, а с y – броя на тези, които пият бренди. Нека възрастта на Едуард е s. Сумата от възрастите на пиещите ром в началото е $23x$, а след като Едуард се присъединява към тях, става $23x + s$. Тогава новата средна възраст на пиещите ром е $\frac{23x+s}{x+1}$. Така получаваме уравнението

$$\frac{23x + s}{x + 1} = 25,$$

от което имаме $x = \frac{s-25}{2}$.

Аналогично, сумата от възрастите на пиещите бренди е $47y$ в началото, а без Едуард е $47y - s$, и получаваме

$$\frac{47y - s}{y - 1} = 49,$$

което е същото като $y = \frac{49-s}{2}$. Следователно, броят на пиратите е

$$x + y = \frac{(s - 25) + (49 - s)}{2} = \frac{24}{2} = 12.$$

Оценяване: 5 т. за изразяване на x и y чрез s; 2 т. за завършване на решението.

Задача 9-12.2. Нека наричаме едно естествено число „бургаско“, ако сумата на неговите делители, включително 1, но без да броим самото число, е с 1 по-малко от самото число. Намерете всички „бургаски“ числа, които имат точна степен, която също е „бургаска“.

Решение. Да допуснем, че числото n е „бургаско“ и някоя негова степен n^k също е „бургаска“. Да означим с $d_1, d_2, \ldots, d_l$ неговите делители. По условие знаем, че $d_1 + d_2 + \cdots + d_n = n - 1$. Сред делителите на n^k имаме делителите

$$d_1, d_1n, \ldots, d_1n^{k-1}, d_2, d_2n, \ldots, d_2n^{k-1}, \ldots, d_l, d_ln, \ldots, d_ln^{k-1}.$$

Всички те са различни едни от други, не са равни на n^k, и тяхната сума е равна на

$$(1+n+n^2+\cdots+n^{k-1})(d_1+d_2+\cdots+d_l)=(1+n+n^2+\cdots+n^{k-1})(n-1)=n^k-1.$$

Следователно, числото n^k няма други делители освен гореспоменатите. Това е възможно само когато n е степен на просто число. В противен случай, ако n се делеше на p^r и не се делеше на p^{r+1}, то в дадения списък с делители трябваше да присъства делителят p^{r+1}, а той липсва там.

Сега, нека $n=p^m$. Тогава сумата от делителите на n, които са по-малки от n, е $1+p+p^2+\cdots+p^{m-1}=\frac{p^m-1}{p-1}$. От друга страна, понеже числото n е „бургаско“, тази сума е равна на $n-1=p^m-1$. Следователно, $p=2$. С проверка можем да установим, че всяко число от вида $n=2^m$ изпълнява условието на задачата.
Оценяване: 4 т. за доказване, че n е степен на просто число; 2 т. за доказване, че $p=2$; 1 т. за завършване на решението.

Задача 9-12.3. Точка M лежи на страната CD на квадрата $ABCD$. Нека точките X, Y и Z са центровете на вписаните окръжности за $\triangle AMD$, $\triangle BCM$ и $\triangle ABM$ съответно. Нека H_X, H_Y и H_Z са ортоцентровете на $\triangle AXD$, $\triangle BYC$ и $\triangle ABZ$ съответно. Докажете, че точките H_X, H_Y и H_Z лежат на една права.

Решение. Тъй като диагоналите BD и AC са ъглополовящи на $\angle ADM$ и $\angle BCM$ съответно, то можем да заключим, че X лежи на BD и Y лежи на AC. Следователно, правите AC и BD съдържат някои от височините на $\triangle AXD$ и $\triangle BYC$. Нека точките P и Q лежат на страните AM и BM и изпълняват условието $AP=BQ=AB$. Тогава AX е ъглополовяща в равнобедрения триъгълник ADP, от което следва, че $AX\perp DP$. Следователно, H_X е пресечната точка на правите DP и AC. Аналогично, H_Y е пресечната точка на CQ и BD. Можем да използваме подобни разсъждения за да заключим, че $AZ\perp BP$ и $BZ\perp AQ$, следователно H_Z е пресечната точка на AQ и BP.

Сега, нека приложим теорема на Дезарг за $\triangle BPD$ и $\triangle AQC$. Правите CD, PA, BQ които свързват съответните върхове на двата триъгълника, се пресичат в точка M. Следователно, теоремата ни казва, че пресечните точки на съответните прави за двата триъгълника лежат на една права. Тези пресечни точки са именно H_X, H_Y, H_Z, значи трите ортоцентъра лежат на една права.
Оценяване: 1 т. за доказване, че H_X лежи на AC и H_Y лежи на BD; 3 т. за дефиниране на точките P, Q и за дефиниране на H_X, H_Y, H_Z чрез тях; 3 т. за прилагане на Теоремата на Дезарг за съответните триъгълници и завършване на решението.

Задача 9-12.4. На окръжност с обиколка 101 см са отбелязани 101 точки, като отбелязаните точки делят окръжността на равни дъги с дължина 1 см. Стефан поставил в една от тези точки монета и започнал да я мести по окръжността, като на всеки ход той мести монетата по посока на часовниковата стрелка на разстояние 6, 7, 8, 9 или 10 см (разстоянието се мери по окръжността). Освен това, Стефан няма право да приключи хода си в точка, в която вече е приключвал предишен ход. В един момент Стефан осъзнал, че е направил точно 45 хода до този момент. Докажете, че каквито и да са били тези 45 хода, той може да направи още един ход.

Решение. Да номерираме точките с числа от 0 до 100. Да допуснем, че след 45 хода

монетата е в точка 0 и Стефан не може да направи ход, т.е. той вече е бил в точки $6, 7, \ldots, 10$. Да забележим, че когато монетата е била в някоя от тези 5 точки, то Стефан не е можел да я премести директно в която и да е от другите 4 точки, защото са разположени твърде близо една до друга. Следователно, той попада в някоя от тези точки само когато е направил пълна обиколка преди това. Тогава преди да се озове в точка 0, Стефан трябва е направил 4 пълни обиколки и още почти цяла обиолка, т.е. монетата е изминала поне 494 см. Следователно, Стефан може да се окаже в ситуация, в която не може да направи ход, само ако е направил поне 49 хода преди това, противоречие. Затова Стефан може да направи още един ход.
Оценяване: 3 т. за обяснение защо всяка от точките $6, 7, \ldots, 10$ е постигната през различна обиколка; 3 т. за оценка на изминатото разстояние преди настоящия ход; 1 т. за завършване на решението.

Задача 9-12.5. Даден е остроъгълен триъгълник ABC с ортоцентър H. Точката M е средата на страната BC, C_1 е петата на височината от върха C към страната AB, а P е петата на перпендикуляра от H към медианата AM. Правата C_1P пресича правата през C, която е успоредна на AM, в точката N. Докажете, че $AN = AB$.

Решение (Кристиан Минчев). Тъй като CC_1 е височина в триъгълник ABC, то H лежи на тази отсечка. В четириъгълник AC_1PH имаме равенството $\angle AC_1H = \angle APH = 90^\circ$, така че той е вписан в окръжност. От друга страна, тъй като C_1M е медиана в правоъгълния триъгълник CC_1B, то е изпълнено $\angle CC_1M = \angle C_1CM = 90^\circ - \angle ABC = \angle HAB$, от което можем да заключим, че MC_1 е допирателна към окръжността описана около AC_1PH. Следователно, от степен на точка M за окръжността описана около AC_1PH следва $MP \cdot MA = MC_1^2 = MB^2$. Ако презапишем последното равенство като $\frac{MP}{MB} = \frac{MB}{MA}$ и използваме, че $\angle PMB = \angle BMA$, можем да заключим, че $\triangle PMB$ и $\triangle BMA$ са подобни. Следователно, $\angle MPB = \angle MBA = \angle MBC_1$, което доказва, че четириъгълникът C_1BMP е вписан в окръжност.

От този факт получаваме че $\angle NC_1B = \angle PC_1B = \angle PMC = \angle AMC = \angle BCN$ съгласно условието $CN \parallel AM$. Следователно, C_1BCN е вписан в окръжност с диаметър BC. От това условие получаваме, че $CN \perp BN$, но понеже $CN \parallel AM$, то $AM \perp BN$. Но вече знаем, че точка M лежи на симетралата на BN, следователно правата AM съвпада със симетралата на BN, от което заключаваме, че $AN = AB$.
Оценяване: 3 т. за доказателство, че $BMPC_1$ е вписан; 3 т. за доказателство, че C_1BNC е вписан; 1 т. за доказателство, че AM е симетрала на BN.

Задача 9-12.6. Нека с $[a, b]$ бележим най-малкото общо кратно на a и b. Естествените числа m и n са такива, че числото

$$p = \frac{[m, n]}{m+1} + \frac{[m, n]}{n+1}$$

е просто. Докажете, че $4p + 5$ е точен квадрат на естествено число.

Решение. Да запишем условието от задачата във вида

$$[m, n](m + n + 2) = p(m + 1)(n + 1).$$

Лявата част се дели на p. Да предположим, че p дели $(m + n + 2)$. Тогава $[m, n]$ дели $(m + 1)(n + 1)$, следователно m дели $n + 1$ и n дели $m + 1$. Това е възможно само когато двойката (m, n) съвпада с някоя от двойките $(1,1),(1,2),(2,1),(2,3),(3,2)$, но с директна проверка можем да установим, че никоя от тях не изпълнява първоначалното условие. Следователно, p не дели $(m+n+2)$, а дели $[m, n]$. Това е възможно само когато p дели някое от m и n.

Без ограничение на общността, нека $m = pk$ за някое естествено число k. Ако p дели и n, т.е. $n = pt$ за някое естествено число m, то да забележим, че тогава $(pk+1)(pt+1)$ се дели на $[k, t]$, откъдето k и t са взаимно прости и $[m, n] = pkt$. Тогава можем да презапишем първоначалното условие в следния вид:

$$\frac{kt}{kp+1} + \frac{kt}{tp+1} = 1.$$

Но лявата част на това уравнение е по-малка от $\frac{kt}{kp} + \frac{kt}{tp} = \frac{k+t}{p}$, следователно $k+t > p$. Освен това, лявата част е по-голяма или равна на $\frac{kt}{kp+k} + \frac{kt}{tp+t} = \frac{k+t}{p+1}$, следователно $k+t \leq p+1$. Това е възможно само ако $k = t = 1$, но тогава $p = 1$, противоречие.

Ако n не се дели на p, то $(pk+1)(n+1)$ се дели на $[k, n]$, следователно k и n са взаимно прости и $[m, n] = pkn$. Тогава можем да презапишем първоначалното равенство като

$$\frac{kn}{kp+1} + \frac{kn}{n+1} = 1.$$

Но дробта $\frac{kn}{n+1}$ е по-малка от 1 само когато $k = 1$, откъдето получаваме $\frac{n}{p+1} + \frac{n}{n+1} = 1$. Следователно, $p = n^2 + n - 1$ и $4p + 5 = 4n^2 + 4n + 1 = (2n+1)^2$.
Оценяване: 1 т. за случая, в който p дели $(m+n+2)$; 3 т. за проверка на случая, в който p дели n; 3 т. за проверка на случая, в който p не дели n.