

# Примерен Математически бой

## 8-9 клас

Math Zone

**Задача 1.** Да се намерят всички тройки реални числа  $(x, y, z)$ , за които е изпълнено

$$\begin{aligned}x + y + z &= 3, \\x^2 + y^2 + z^2 &= 3, \\x^3 + y^3 + z^3 &= 3.\end{aligned}$$

**Задача 2.** Да се докаже, че уравнението

$$x^2 - 23 = y^{11}$$

няма решение в цели числа

**Задача 3.** Нека  $\Gamma$  е описаната около  $\triangle ABC$  окръжност и нека  $\ell$  да е допирателната към  $\Gamma$ , допираща в  $A$ . Нека  $D$  и  $E$  са точки на страните  $AB$  и  $AC$  съответно, такива че  $BD : DA = AE : EC$ . Нека  $F$  и  $G$  са пресечните точки на  $\Gamma$  и правата  $DE$ . Нека правата през  $D$ , успоредна на  $AC$  пресича  $\ell$  в точка  $X$ . Нека правата през  $E$ , успоредна на  $AB$  пресича  $\ell$  в точка  $Y$ . Да се докаже, че четириъгълника  $FXYG$  е вписан и описната около него окръжност се допира до правата  $BC$ .

**Задача 4.** Нека  $n \geq m \geq 1$  са естествени числа. Да се докаже, че

$$\frac{m+1}{m^3} + \frac{(m+1)+1}{(m+1)^3} + \dots + \frac{n+1}{n^3} \geq m \cdot \left( \frac{1}{m^2} + \frac{1}{(m+1)^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \right)^2$$

**Задача 5.** Дадена е таблица  $20 \times 23$ . От нея са оцветени  $n$  квадратчета, така че от останалите няма 4, които са върхове на правоъгълник със страни, успоредни на страните на таблицата. Намерете най-малката стойност на  $n$ .

**Задача 6.** Даден е вписан четириъгълник  $PQRS$ , за който  $\angle PSR = 90^\circ$ . Точките  $H$  и  $K$  са съответно петите на перпендикулярите от точка  $Q$  към правите  $PR$  и  $PS$ . Докажете, че  $HK$  разполовява отсечката  $QS$ .

---

**Задача 7.** Имаме шахматна таблица  $15 \times 15$  на която са поставени 15 топа, такива че **никой никого не атакува**. Докажете, че ако преместим всеки топ с ход на кон, то ще има два топа, които се атакуват.

**Задача 8.** Да се намерят всички естествени числа  $k$ , за които съществува естествено число  $n$ , такова че всяко от числата  $n^2 + 1$  и  $(n + 1)^2 + 1$  да се дели на  $k$ .