Дванадесети фестивал на младите математици
Созопол, 2023 г.
Първи кръг, Тема за 10 – 12 клас

Задача 1. На дъската са записани естествените числа от 1 до n. Ачка (А) и Бавачка (Б) играят следната игра. Първо А изтрива едно число, после Б изтрива две последователни естествени числа, след това А изтрива три последователни естествени числа и накрая Б изтрива четири последователни естествени числа. Кое е най-малкото n, при което Б със сигурност може да извърши ходовете си, без значение как А играе?
(*Навсякъде считаме две естествени числа за последователни, ако разликата им е* 1.)

Задача 2. Съществува ли функция $f : \mathbb{Z}_{\geq 0} \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$, такава че

$$f(ab) = f(a)b + af(b)$$

за произволни $a, b \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ и $f(p) > p^p$ за всяко просто число p?
(*Със* $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ *означаваме множеството на целите неотрицателни числа.*)

Задача 3. Фиксирани са положително реално число k, триъгълник ABC с описана окръжност ω и точка M от страната му AB. Точката P се движи по ω, а Q от отсечката CP е такава, че $CQ : QP = k$. Правата през P, успоредна на CM, пресича правата MQ в точка N. Да се докаже, че N лежи на постоянна окръжност, независеща от избора на P.

Задача 4. Намерете всички реални числа a, за които съществуват функции $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, като g е строго растяща, такива че $f(1) = 1$, $f(2) = a$ и

$$f(x) - f(y) \leq (x - y)(g(x) - g(y))$$

за всички реални числа x и y.

Задача 5. Нека $r \geq 2023$ е рационално число. Реалните числа a, b и c са такива, че $4a^2 + 4b^2 + 9c^2 = r$. Съществува ли стойност на r, при която броят рационални тройки (a, b, c), които достигат най-голямата възможна стойност на $4ab + 6bc - 6ac$, е:
а) нула б) краен, но ненулев?

Задача 6. Нека S е множество от реални числа. Ще казваме, че S е *силно*, ако за всеки две различни a и b от S числото $a^2 + b\sqrt{2023}$ е рационално. Ще казваме, че S е *много силно*, ако за всяко a от S числото $a\sqrt{2023}$ е рационално.
а) Да се докаже, че ако S е много силно множество, то е и силно.
б) Да се намери най-малкото естествено число k, за което всяко силно множество от k различни реални числа е много силно.

Задача 7. Вписаната в триъгълника ABC окръжност допира страните BC, AC и AB в точките A_1, B_1 и C_1. Правата през средите на отсечките AB_1 и AC_1 пресича допирателната в A към описаната около триъгълника ABC окръжност в точката A_2. Точките B_2 и C_2 са дефинирани аналогично. Да се докаже, че точките A_2, B_2 и C_2 лежат на една права.

Задача 8. Нека D е безкрайна (само в едната посока) редица от нули и единици. За всяко естествено число n с a_n означаваме броят различни подредици от последователни символи в D с дължина n. Съществува ли редица D, за която неравенството

$$\left| \frac{a_n}{n \log_2 n} - 1 \right| < \frac{1}{100}$$

е изпълнено за всяко естествено число $n > 10^{10000}$?