Дванадесети фестивал на младите математици

Созопол, 2023 г.

Първи кръг, Тема за 10 – 12 клас

Р Е Ш Е Н И Я

Задача 1. На дъската са записани естествените числа от 1 до n. Ачка (А) и Бавачка (Б) играят следната игра. Първо А изтрива едно число, после Б изтрива две последователни естествени числа, след това А изтрива три последователни естествени числа и накрая Б изтрива четири последователни естествени числа. Кое е най-малкото n, при което Б със сигурност може да извърши ходовете си, без значение как А играе?
(*Навсякъде считаме две естествени числа за последователни, ако разликата им е* 1.)

Отговор. 14

Решение. Нека първо $n \leq 13$, като можем да считаме $n = 13$. Първо А изтрива 4. Сега ако Б изтрие $(7, 8)$ или $(8, 9)$, то А изтрива $(10, 11, 12)$, а ако Б изтрие $(9, 10)$ или $(10, 11)$, то А изтрива $(5, 6, 7)$; а ако Б изтрие друго, то А изтрива $(8, 9, 10)$. Във всички случаи Б не може да реализира втория си ход.

Нека сега $n = 14$ и А е изтрил k, като вляво остават $k-1$ числа, а вдясно са $14-k$. Без ограничение на общността $k - 1 \leq 14 - k$, т.е. $k \leq 7$. Ако $k \geq 5$, то Б изтрива $(k+1, k+2)$ и остават групите $(1, 2, 3, 4, \ldots, k-1)$ и $(k+3, k+4, \ldots, 14)$, всяка с поне 4 числа. Ако $k = 3, 4$, то Б изтрива $(1, 2)$, а ако $k = 1, 2$, то Б изтрива $(3, 4)$ – и в двата случая остават поне 10 последователни числа и е ясно, че без значение кои 3 изтрие А, ще останат 4 последователни, които Б да изтрие.

Оценяване. 2 т. за верен отговор; 4 т. за $n \leq 13$; 6 т. за $n = 14$.

Задача 2. Съществува ли функция $f : \mathbb{Z}_{\geq 0} \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$, такава че

$$f(ab) = f(a)b + af(b)$$

за произволни $a, b \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ и $f(p) > p^p$ за всяко просто число p?
(*Със* $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ *означаваме множеството на целите неотрицателни числа.*)

Решение. Да! За всеки избор $f(p_i)$ на f върху простите числа p_i, равенствата $f(0) = f(1) = 0$ и

$$f(n) = n \sum_{i=1}^{k} \frac{x_i}{p_i} f(p_i)$$

за $n > 1$, където $n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{x_i}$ е разлагането на n на прости множители, дават добре дефинирана функция, която изпълнява исканите условия.

Оценяване. 0 т. за верен отговор, 8 т. за работещ пример и 4 т. за пълната му проверка

Задача 3. Фиксирани са положително реално число k, триъгълник ABC с описана окръжност ω и точка M от страната му AB. Точката P се движи по ω, а Q от отсечката CP е такава, че $CQ : QP = k$. Правата през P, успоредна на CM, пресича правата MQ в точка N. Да се докаже, че N лежи на постоянна окръжност, независеща от избора на P.

Решение. Да разгледаме хомотетия с център C и коефициент $\frac{1}{k+1}$. Тогава образът на P е Q, а на окръжността ω е фиксирана окръжност ω_1. Понеже $CM \parallel PN$ и $CP \cap MN = Q$, от теоремата на Талес имаме $MQ : QN = k$. Така хомотетията с център M и коефициент $k+1$ изпраща Q в N и фиксираната ω_1 във фиксирана окръжност ω_2. Твърдението следва.

Оценяване. 2 т. за $MQ : QN = k$, 4 т. за преход към ω_1, 4 т. за преход към ω_2, 2 т. за окончателен извод

Задача 4. Намерете всички реални числа a, за които съществуват функции $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, като g е строго растяща, такива че $f(1) = 1$, $f(2) = a$ и

$$f(x) - f(y) \leq (x - y)(g(x) - g(y))$$

за всички реални числа x и y.

Отговор. $a = 1$

Решение. За произволни естествено число n и цяло число $0 \leq k \leq n-1$ имаме от даденото

$$f\left(1 + \frac{k+1}{n}\right) - f\left(1 + \frac{k}{n}\right) \leq \frac{g\left(1 + \frac{k+1}{n}\right) - g\left(1 + \frac{k}{n}\right)}{n} \tag{*}$$

и сега сумиране по k води до $f(2) - f(1) \leq \frac{g(2)-g(1)}{n}$. Предвид $g(2) > g(1)$ от монотонността на g, за достатъчно голямо n лявата страна става по-малка от произволно положително реално число – в частност $f(2) \leq f(1)$.

От друга страна, смяна на местата в x и y в даденото неравенство води до $f(y) - f(x) \leq (y - x)(g(y) - g(x)) = (x - y)(g(x) - g(y))$. Сега по същия начин получаваме $f(1) - f(2) \leq \frac{g(1)-g(2)}{n}$ и $f(1) \leq f(2)$. Окончателно $f(1) = f(2) = 1$ и това е възможно например когато f е константа.

Оценяване. 2 т. за пример при $a = 1$ и изказана хипотеза, че $f(2) = f(1)$ винаги, 4 т. за $(*)$, по 3 т. за всяко от $f(2) \leq f(1)$ и $f(1) \leq f(2)$

Задача 5. Нека $r \geq 2023$ е рационално число. Реалните числа a, b и c са такива, че $4a^2 + 4b^2 + 9c^2 = r$. Съществува ли стойност на r, при която броят рационални тройки (a, b, c), които достигат най-голямата възможна стойност на $4ab + 6bc - 6ac$, е:
а) нула б) краен, но ненулев?

Отговор. а) да б) не

Решение. За краткост да положим $x = 2a$, $y = 2b$, $z = 3c$ – тогава $x^2 + y^2 + z^2 = r$ и се интересуваме от $xy + yz - xz$. Имаме $(x + z - y)^2 \geq 0 \Leftrightarrow xy + yz - xz \leq \frac{x^2+y^2+z^2}{2} = \frac{r}{2}$, като равенство се достига при всички (x, y, z) с $y = x + z$ и $x^2 + y^2 + z^2 = r$ – значи е достатъчно да разгледаме $x^2 + z^2 + (x + z)^2 = r$. Ако последното има рационално решение, то може да се представи като $x = \frac{p}{s}$, $z = \frac{q}{s}$, където $p, q, s \neq 0$ са цели числа. Тогава $p^2 + q^2 + (p + q)^2 = rs^2 \Leftrightarrow (2p + q)^2 + 3q^2 = 2rs^2$.

За $r = 2023$ ще докажем, че няма решение чрез метода на безкрайното спускане. Нека p, q и s са такива, че сумата $|p| + |q| + |s|$ е минимална възможна. Разглеждане по модул 3 дава, че $2p + q$ и s се делят на 3, оттам q (а значи и p) се дели на 3 и след $p = 3p_1$, $q = 3q_1$, $s = 3s_1$ достигаме до $(2p_1 + q_1)^2 + 3q_1^2 = 4046s_1^2$, което е същото уравнение като $(2p + q)^2 + 3q^2 = 4046s^2$, но с $|p_1| \leq |p|$, $|q_1| \leq |q|$ и $|s_1| < s$ (последното е строго понеже $s \neq 0$) – оттук $|p_1| + |q_1| + |s_1| < |p| + |q| + |s|$, противоречие.

Остава да докажем, че ако $x^2 + xz + z^2 = \frac{r}{2}$ има поне едно рационално решение (x_0, z_0), то има безбройно много такива. За целта, нека $x_0^2 + x_0z_0 + z_0^2 = \frac{r}{2}$ и да разгледаме $z =$

$k(x-x_0)+z_0$. Тогава $\frac{r}{2}=x^2+xz+z^2$ точно когато $x_0^2+x_0z_0+z_0^2=x^2+kx(x-x_0)+xz_0+k^2(x-x_0)^2+2kz(x-x_0)+z_0^2$, т.е.

$$(x-x_0)(x(k^2+k-1)+x_0+z_0+2kz_0-x_0k^2)=0.$$

Следователно изборът $x=\frac{x_0k^2-2kz_0-x_0-z_0}{k^2+k-1}$ води до безбройно много двойки (x,z) когато k се мени. (Отбелязваме, че поне едно от x_0 и z_0 е непременно ненулево поради $r>0$.)

Коментар. Подходът в б) е илюстрация на факта, че ако елипса, парабола или хипербола C съдържа точка P с рационални координати, то за всяка права ℓ, неминаваща през P, изображението, което проектира през P точка от C в точка от ℓ, е и биекция между рационалните точки от C и рационалните точки от L. По този начин могат да се опишат всички точки с рационални координати в C. (Същото важи и за произволно поле, а не само за рационалните числа.)

Безбройно много решения в б) могат да се достигнат и чрез имитация на известни подходи за скокове около уравнението на Пел.

Оценяване. 3 т. за извеждане на уравнение за достигане на максимум; 3 т. за пример (и проверка) за нула тройки; 6 т. за опровергаване на краен ненулев брой тройки (от които 2 т. за свеждане до уравнение от тип Пел, евентуално със свободен член, различен от 1)

Задача 6. Нека S е множество от реални числа. Ще казваме, че S е *силно*, ако за всеки две различни a и b от S числото $a^2+b\sqrt{2023}$ е рационално. Ще казваме, че S е *много силно*, ако за всяко a от S числото $a\sqrt{2023}$ е рационално.
а) Да се докаже, че ако S е много силно множество, то е и силно.
б) Да се намери най-малкото естествено число k, за което всяко силно множество от k различни реални числа е много силно.

Отговор. б) 3

Решение. а) Нека a, b от S са произволни. От даденото имаме, че $a\sqrt{2023}$ и $b\sqrt{2023}$ са рационални, значи $a^2=\frac{(a\sqrt{2023})^2}{2023}$ също е рационално и оттам сборът $a^2+b\sqrt{2023}$ също е.

б) Първо ще намерим контрапример за $k=2$. (Можем просто да го дадем директно, но ще покажем начин за досещане, за удобство на читателя.) Нека $a=m\sqrt{2023}$ и $b=n\sqrt{2023}$ за реални числа m и n – тогава искаме $m\neq n$, поне едно от $2m$ и $2n$ да е ирационално, но $2m^2+2n$ и $2n^2+2m$ да са рационални – еквивалентно, m и n са ирационални и $m^2+n=s$, $n^2+m=t$ за някакви рационални $s\neq t$, т.е. уравнението $(t-n^2)^2+n-s=0 \Leftrightarrow n^4-2n^2t+n+t^2-s=0$ има поне един ирационален корен. Избирайки $s=t^2+k\neq t$ за подходящо k, искаме рационални t и $k\neq t-t^2$ и ирационален корен на $n^4-2n^2t+n+k=0$. С проба-грешка (или тръгване от разлагане $(n-a)((n-1)^3+b)$) намираме $t=6$, $k=30$, при които уравнението става $(n-2)(n+3)(n^2-n-5)=0$ и има $n=\frac{1+\sqrt{21}}{2}$ за ирационален корен (съответното m е $\frac{1-\sqrt{21}}{2}$). (Ето две възможни алтернативи: 1) опростявания с $m=a_1+b_1\sqrt{c}$, $n=a_2+b_2\sqrt{c}$; 2) използване на известния факт, че многочлен на една променлива и от нечетна степен има поне един реален корен.)

Сега да разгледаме S с големина поне 3 и свойството за рационалност. Нека a, b и c са три различни числа от S. За краткост да означим $f(x)=x^2+x\sqrt{2023}$ – тогава от даденото следва, че $f(a)+f(b)$, $f(b)+f(c)$ и $f(c)+f(a)$ са рационални и оттук $f(a)=\frac{(f(a)+f(b))+(f(a)+f(c))-(f(b)+f(c))}{2}$ също е рационално; аналогично за $f(b)$ и $f(c)$. Оттук $a^2+b\sqrt{2023}-f(b)=a^2-b^2$ е рационално и $f(a)-(a^2+b\sqrt{2023})=(a-b)\sqrt{2023}$ също е.

Понеже $a \neq b$, получаваме, че $2023\frac{a^2-b^2}{(a-b)\sqrt{2023}} = \sqrt{2023}(a+b)$ е рационално и окончателно $a\sqrt{2023} = \frac{\sqrt{2023}(a-b)+\sqrt{2023}(a+b)}{2}$ също е рационално.

Оценяване. 2 т. за а), по 5 т. за контрапример при $k = 2$ и доказателство за $k \leq 3$ в б).

Задача 7. Вписаната в триъгълника ABC окръжност допира страните BC, AC и AB в точките A_1, B_1 и C_1, съответно. Правата през средите на отсечките AB_1 и AC_1 пресича допирателната в A към описаната около триъгълника ABC окръжност в точката A_2. Точките B_2 и C_2 са дефинирани аналогично. Да се докаже, че точките A_2, B_2 и C_2 лежат на една права.

Решение. Да разгледаме следните три окръжности: тази с център A и радиус 0, вписаната окръжност на ABC и описаната окръжност на ABC; да ги означим съответно с k_A, ω и k. Радикалната ос на k_A и ω е правата през средите на AB_1 и AC_1 (тъй като самите среди имат равни степени), а тази на k_A и k е допирателната към k в A. Понеже трите радикални оси се пресичат в една точка, тази точка е именно A_2 и значи тя лежи на радикалната ос на k и ω. Същото важи аналогично за B_2 и C_2, с което задачата е решена.

Оценяване. Не повече от 3 т. за недовършени идеи с радикални оси, ако няма други съществени синтетични приноси

Задача 8. Нека D е безкрайна (само в едната посока) редица от нули и единици. За всяко естествено число n с a_n означаваме броят различни подредици от последователни символи в D с дължина n. Съществува ли редица D, за която неравенството

$$\left|\frac{a_n}{n\log_2 n} - 1\right| < \frac{1}{100}$$

е изпълнено за всяко естествено число $n > 10^{10000}$?

Решение. Да номерираме позициите на елементите с $1, 2, \dots$ Образуваме блокове по следния начин: блок номер k е с дължина от 2^k елемента, като последният е на позицията с номер 2^{2^k} (напр. блок 1 е съставен от позиции $\{3, 4\}$, блок 2 е от позиции $\{13, 14, 15, 16\}$ и т.н.). Нека в позициите, които са част от блоковете, запишем единици, а в останалите – нули. Ще покажем, че този низ върши работа.

Броят подредици с дължина n, получени при долепянето на две редици от еднакви символи, е не повече от $2n$. Сега да разгледаме редиците, които пресичат поне два блока. Между $(k-1)$-вия и k-тия блок имаме $2^{2^k} - 2^{2^{k-1}} - 2^k + 2 \geq 2^{2^{k-1}}$ нули (последното следва лесно по индукция). Така за да може подредицата да пресича блоковете с номера $k-1$ и k, трябва $2n \geq 2^{2^k}$, значи началото на въпросната подредица е сред първите $2n$ символа, т.е. тези също са не повече от $2n$ на брой. Остава да оценим броя на редиците, които съдържат изцяло точно един блок във вътрешността си. За да може подредица с дължина n да съдържа k-тия блок, трябва $2^k \leq n-2$ и значи $k < \log_2 n$. Значи за блока имаме не повече от $\log_2 n$ избора за номера му и не повече от n избора за първия член в подредицата, съответно най-много $n\log_2 n$ възможности. Окончателно $a_n \leq 4n + n\log_2 n$, което не надминава $1{,}01n\log_2 n$ за $n \geq 2^{400}$.

За оценката отдолу, да разгледаме тези k, за които $2^{2^{k-1}} > n > 2^k$, т.е. $k \in \Delta := (\log_2 \log_2 2n; \log_2 n)$ (разликата в краищата на интервала е над 1 за разглежданите n, т.е. интервалът със сигурност съдържа цяло число). От разсъждението за разстоянието между два блока по-горе следва, че подредица с дължина n не пресича други блокове. За първият символ имаме $n - 2^k - 1$ възможни позиции, откъдето

$$a_n \geq \sum_{k \in \Delta} (n - 2^k - 1) \geq (\log_2 n - \log_2 \log_2 2n - 2)(n-1) - \sum_{k=1}^{\lfloor \log_2 n \rfloor} 2^k$$

$$\geq (\log_2 n - \log_2 \log_2 2n)n - (\log_2 n - \log_2 \log_2 2n - 2) - 2n - n - 1.$$

Остава да съобразим, че

$$n \log_2 \log_2 2n + \log_2 n + \log_2 \log_2 2n + 3n - 1 \leq 0{,}01 n \log_2 n$$

понеже $\frac{n}{400} \log_2 n$ надминава $n \log_2 \log_2 2n$, $\log_2 n$, $\log_2 \log_2 2n$ и $3n$ за разглежданите n.

Оценяване. 6 т. за предлагане на работеща конструкция, 3 т. за оценка отгоре и 3 т. за оценка отдолу