Дванадесети фестивал на младите математици
Созопол, 2023 г.
Трети кръг, Тема за 10 – 12 клас

Задача 1. Да се реши в цели числа системата

$$ab + 1 = (c + 1)(d + 1), \quad cd + 1 = (a - 1)(b - 1).$$

Задача 2. Даден е триъгълник ABC с радиус на вписаната окръжност 1 и описана окръжност k. Нека R_A е радиусът на окръжността, допираща се до BC и до k в A; дефинираме R_B и R_C аналогично. Да се намери най-голямата възможна стойност на $\dfrac{1}{R_A} + \dfrac{1}{R_B} + \dfrac{1}{R_C}$.

Задача 3. Точно 2^{1012} от подмножествата на $\{1, 2, \ldots, 2023\}$ са оцветени в червено. Винаги ли е вярно, че има три различни червени множества A, B и C, такива че всеки елемент на A принадлежи на поне едно от B и C?

Задача 4. Да се намерят всички функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, такива че

$$f(2x + y + f(x + y)) + f(xy) = yf(x)$$

за всички реални числа x и y.

Задача 5. Вярно ли е, че за всеки полином $P(x)$ с реални коефициенти и степен 2023 има естествено число n, такова че уравнението $P(x) = n^{-100}$ няма рационален корен?

Задача 6. Даден е триъгълник ABC с $\sphericalangle ABC = 54^\circ$ и $\sphericalangle ACB = 42^\circ$. Точката D е петата на височината от върха A към BC, а I е центърът на вписаната окръжност в ABC. Точката K от правата AD е такава, че D е между A и K и AK е равна на диаметъра на описаната около триъгълника ABC окръжност. Да се намери големината на $\sphericalangle KID$.

Задача 7. Между някои от градовете в държавата Дриландия, в която има поне три града, са прекарани двупосочни пътища по такъв начин, че от всеки град може да се стигне до всеки друг. Два града ще наричаме *близки*, ако от единия може да се стигне до другия чрез пътища посредством един или два междинни града. Кметът Дрилаго направил пътната система здрава, като между всяка двойка несвързани с път близки градове построил директен път. Да се докаже, че след разширението съществува пътешествие, което завършва там, откъдето е започнало и при което всеки град освен първия е посетен точно веднъж, а първият е посетен точно два пъти (в началото и в края).

Задача 8. Съществуват ли естествено число n и реални числа $a_0, a_1, \ldots, a_n$, всяко равно на 1 или (-1), за които реалният полином $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ се дели на реалния полином $x^{2023} - 2x^{2022} + c$, ако: а) $c = 1$ б) $c = -1$?
(За полиноми $P(x)$ и $Q(x)$ с реални коефициенти казваме, че $P(x)$ се дели на $Q(x)$, ако съществува полином $R(x)$ с реални коефициенти, такъв че $P(x) = Q(x)R(x)$.)