Дванадесети фестивал на младите математици

Созопол, 2023 г.

Трети кръг, Тема за 10 – 12 клас

Р Е Ш Е Н И Я

Задача 1. Да се реши в цели числа системата

$$ab+1=(c+1)(d+1), \quad cd+1=(a-1)(b-1).$$

Решение. Явно $ab-cd=a+b=c+d$ – нека общата им стойност е s. Тогава $s=a(s-a)-c(s-c)=(a-c)(s-a-c)$. Ако s е нечетно, то $a-c$ и $s-a-c$ също са нечетни, но тогава сумата им $s-2c$ би била четна – така s, а оттам и $a-c$ и $s-a-c$, са четни. Значи $a-c=2x$ и $s-a-c=2y$ за някакви цели числа x и y, откъдето $s=4xy$. Получаваме

$$(a,b,c,d)=(2xy+x-y, 2xy-x+y, 2xy-x-y, 2xy+x+y)$$

и обратно, директно се проверява, че всяка такава четворка изпълнява даденото.

Оценяване. 2 т. за верен отговор, 2 т. за проверката му и 8 т. за обосновка, че няма други решения, от които 2 т. за получаване на система чрез a, c, s (или b, d, s)

Задача 2. Даден е триъгълник ABC с радиус на вписаната окръжност 1 и описана окръжност k. Нека R_A е радиусът на окръжността, допираща се до BC и до k в A; дефинираме R_B и R_C аналогично. Да се намери най-голямата възможна стойност на $\frac{1}{R_A}+\frac{1}{R_B}+\frac{1}{R_C}$.

Решение. Нека h_A, h_B и h_C са височините на ABC. Явно $h_A \leq 2R_A$, $h_B \leq 2R_B$, $h_C \leq 2R_C$, откъдето

$$\frac{1}{R_A}+\frac{1}{R_B}+\frac{1}{R_C} \leq \frac{2}{h_A}+\frac{2}{h_B}+\frac{2}{h_C}=\frac{a}{S_{ABC}}+\frac{b}{S_{ABC}}+\frac{c}{S_{ABC}}=\frac{2p_{ABC}}{S_{ABC}}=2r_{ABC}=2$$

където p_{ABC}, S_{ABC} и r_{ABC} са съответно полупериметърът, лицето и радиусът на вписаната окръжност на ABC. Равенство се достига (само) при равностранен триъгълник.

Оценяване. 1 т. за верен отговор и пример, 5 т. за $h_A \leq 2R_A$ или аналогично, 6 т. за довършване. При недовършени алгебрични опити се присъждат не повече от 4 т. (отделно от тези за отговор и пример), но само за геометрични аргументи

Задача 3. Точно 2^{1012} от подмножествата на $\{1,2,\ldots,2023\}$ са оцветени в червено. Винаги ли е вярно, че има три различни червени множества A, B и C, такива че всеки елемент на A принадлежи на поне едно от B и C?

Решение. Да разгледаме съвкупността от червените множества и обединенията им по двойки – общо $\frac{2^{1012}(2^{1012}+1)}{2} > 2^{2023}$ множества. Значи поне две от тези съвпадат – но ако $A\cup D=B\cup C$ (позволено е $A\equiv D$ или $B\equiv C$), то следва $A\subseteq B\cup C$.

Оценяване. 3 т. за достатъчността на $A\cup D=B\cup C$ (от които само 2 т., ако не се отбележи включването на възможностите $A\equiv D$ и $B\equiv C$), 5 т. за броене на червените множества и обединенията им по двойки (от които само 2 т., ако се броят само обединенията по двойки), 4 т. за довършване

Задача 4. Да се намерят всички функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, такива че

$$f(2x + y + f(x + y)) + f(xy) = yf(x)$$

за всички реални числа x и y.

Решение. Да означим $f(0) = a$. От $x = y = 0$ имаме $f(a) + a = 0$, а пък $x = 0$ с $y = a$ дава $f(a + f(a)) + a = a^2$ и понеже $f(a + f(a)) = f(0) = a$, то $2a = a^2$, т.е. $f(0) \in \{0, 2\}$.

Нека $f(0) = 2$. С $y = 1$ следва $f(2x + 1 + f(x + 1)) = 0$, а от $x = 0$ имаме $f(y + f(y)) = 2y - 2$. Полагайки $y = 2x + 1 + f(x + 1)$ в последното дава $0 = 2(2x + 1 + f(x + 1)) - 2$, т.е. $f(x) = 2 - 2x$ за всяко x.

Сега нека $f(0) = 0$. Полагането на $y = -x$ в началото дава $f(-x^2) = -(x + 1)f(x)$. Оттук $x = -1$ дава $f(-1) = 0$ и сега $x = 1$ води до $f(1) = 0$. Също, $y = 0$ в началното дава $f(2x + f(x)) = 0$ (и значи $f(2x + 2 + f(x + 1)) = 0$), $y = 1$ дава $f(2x + 1 + f(x + 1)) = 0$, а $x = 1$ води до $f(y + 2 + f(y + 1)) + f(y) = 0$. В последното $y = 2x + 1 + f(x + 1)$ дава $f(2x + 3 + f(x + 1) + f(2x + 2 + f(x + 1))) = 0$. Отчитайки $f(2x + 2 + f(x + 1))) = 0$, заключаваме $f(2x + 3 + f(x + 1)) = 0$ (оттук и $f(2x - 1 + f(x - 1)) = 0$). От друга страна, $y = -1$ в даденото дава $f(2x - 1 + f(x - 1)) + f(-x) = -f(x)$, съответно $f(-x) = -f(x)$ за всяко x и $f(-y - 2 + f(-y - 1)) = f(-y - 2 - f(y + 1)) = -f(y + 2 + f(y + 1)) = f(y)$. Накрая, заместваме $x = -1$ и y с $-y$ в даденото, за да получим (предвид $f(-1) = 0$) $f(-y - 2 + f(-y - 1)) + f(y) = 0$ и значи $2f(y) = 0$, т.е. $f(x) = 0$ за всяко x. Директно се проверява, че 0 и $2 - 2x$ са решения на даденото уравнение.

Оценяване. 2 т. за верен отговор и проверка на решенията; 1 т. за $f(0) \in \{0, 2\}$, 1 т. за довършване на $f(0) = 2$, 8 т. за случая $f(0) = 0$, от които 1 т. за $f(1) = f(-1) = 0$, 5 т. за доказване на нечетността на f (1 т. за $f(2x+2+f(x+1)) = 0$, 1 т. за $f(2x+3+f(x+1)) = 0$, 1 т. за $f(2x - 1 + f(x - 1)) = 0$ и 2 т. за довършване), 2 т. за завършване (напр. с $x = -1$, $y \to -y$)

Коментар. Задачата е еквивалентна на МОМ 2015/5 (уравнението там е за $f(x) + x$).

Задача 5. Вярно ли е, че за всеки полином $P(x)$ с реални коефициенти и степен 2023 има естествено число n, такова че уравнението $P(x) = n^{-100}$ няма рационален корен?

Решение. Да! Да допуснем противното. Като разгледаме кои да е 2024 дроби от вида $\frac{1}{n^{100}}$ и съответните им рационални x и за тези приложим интерполационната формула на Лагранж, автоматично получаваме, че P е непременно с рационални коефициенти. Значи можем да запишем $P(x) = \frac{f(x)}{N}$ за естествено число N и полином $f(x)$ с цели коефициенти – оттук съществува редица $(a_n)_{n \geq 1}$ от рационални числа, такава че $f(a_n) = Nn^{-100}$ за всяко естествено n. Разписвайки $a_n = \frac{p_n}{q_n}$, НОД$(p_i, q_i) = 1$ и $f(x) = \sum_{i=0}^{2023} b_i x^i$, получаваме

$$n^{100} \sum_{i=0}^{2023} b_i p_n^i q_n^{2023-i} = N q_n^{2023}. \tag{1}$$

Тъй като N и b_0 са фиксирани (те зависят само от 2024-те фиксирани дроби в началото), можем да изберем $n > \max(N, |b_{2023}|)$ да е просто число. Тъй като n дели Nq_n^{2024}, получаваме, че n дели q_n, откъдето n^{2024} дели дясната страна и значи непременно n дели $\sum_{i=0}^{2023} b_i p_n^i q_n^{2023-i}$. Но n дели q_n, откъдето n трябва да дели $b_{2023} p_n^{2023}$ и понеже НОД$(n, p_n) = 1$ (поради $n \mid q_n$ и НОД$(p_n, q_n) = 1$), получаваме че n дели b_{2023}, което противоречи на $n > |b_{2023}|$.

Оценяване. 2 т. за свеждане до полином с рационални коефициенти, 2 т. за (1), 2 т. за избора n да е достатъчно голямо просто число (може без конкретна долна граница), 6 т. за довършване

Задача 6. Даден е триъгълник ABC с $\sphericalangle ABC = 54^\circ$ и $\sphericalangle ACB = 42^\circ$. Точката D е петата на височината от върха A към BC, а I е центърът на вписаната окръжност в ABC. Точката K от правата AD е такава, че D е между A и K и AK е равна на диаметъра на описаната около триъгълника ABC окръжност. Да се намери големината на $\sphericalangle KID$.

Отговор. 6°

Решение. Ще докажем по-общо, че при $\sphericalangle ABC = \beta \geq \gamma = \sphericalangle ACB$ имаме $\sphericalangle KID = \frac{\beta-\gamma}{2}$. Пресмятаме $\sphericalangle DAI = \sphericalangle BAI - \sphericalangle BAD = \frac{\alpha}{2} - 90^\circ + \beta = \frac{\beta-\gamma}{2}$ и значи е достатъчно да докажем, че $\sphericalangle KID = \sphericalangle DAI$, т.е. $KI^2 = KD \cdot KA$. При стандартните означения за ABC имаме $AK = 2R$ и $KD = 2R - AD = 2R - \frac{2S}{a}$, значи остава да покажем, че $KI^2 = 4R^2 - \frac{4RS}{a}$.

От Косинусовата теорема за триъгълника AKI получаваме

$$KI^2 = AK^2 + AI^2 - 2 \cdot AK \cdot AI \cdot \cos\frac{\beta-\gamma}{2} = 4R^2 + \frac{r^2}{\sin^2\frac{\alpha}{2}} - 4R\frac{r}{\sin\frac{\alpha}{2}}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}$$

$$= 4R^2 + \frac{4S^2}{(a+b+c)^2\sin^2\frac{\alpha}{2}} - \frac{8RS}{(a+b+c)\sin\frac{\alpha}{2}}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}$$

и така свеждаме исканото до

$$\frac{S^2}{(a+b+c)^2} - \frac{2RS\cos\frac{\beta-\gamma}{2}\sin\frac{\alpha}{2}}{a+b+c} = -\frac{RS\sin^2\frac{\alpha}{2}}{a}.$$

Имаме $RS = \frac{abc}{4}$, $\frac{S^2}{a+b+c} = \frac{(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}{16}$, $\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2} = \frac{(a+c-b)(a+b-c)}{4bc}$ и $\cos\frac{\beta-\gamma}{2}\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\left(\sin\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2} + \sin\frac{\alpha+\gamma-\beta}{2}\right) = \frac{1}{2}(\cos\gamma + \cos\beta) = \frac{a^2+b^2-c^2}{4ab} + \frac{a^2+c^2-b^2}{4ac}$, с което сведохме исканото до тъждеството

$$\frac{(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}{16(a+b+c)} - \frac{\frac{abc}{2}\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{4ab} + \frac{a^2+c^2-b^2}{4ac}\right)}{a+b+c} = -\frac{(a+c-b)(a+b-c)}{16}.$$

След освобождаване от знаменател и разкриване на скобите, получаваме исканото.

Оценяване. 1 т. за верен отговор, 3 т. за свеждане до $KI^2 = KD \cdot KA$, общо 1 т. за изрази на KD и KA чрез стандартни елементи на ABC, 1 т. за целта KI^2 да се изрази чрез косинусова теорема от подходящ триъгълник, 6 т. за довършване (от които не могат да се взимат частични)

Коментар. За пълнота нека скицираме едно възможно синтетично решение. Ако AA' е диаметър на описаната около триъгълника ABC окръжност k и $AI \cap k = M$, то $AA' = AK$ и A', M, K лежат на една права. Ако тази права пресича BC в P, то $ADMP$ и $ALA'P$ са вписани, откъдето $MA' \cdot MP = ML \cdot MA = MK \cdot MP$. Обаче $ML \cdot MA = MB^2 = MI^2$, съответно $MI^2 = MK \cdot MP$ и $\triangle IKM \sim \triangle PKI$. Оттук $KI^2 = KM \cdot KP = KD = KA$ и исканото следва.

Задача 7. Между някои от градовете в държавата Дриландия, в която има поне три града, са прекарани двупосочни пътища по такъв начин, че от всеки град може да се стигне до всеки друг. Два града ще наричаме *близки*, ако от единия може да се стигне до другия чрез пътища посредством един или два междинни града. Кметът Дрилаго направил пътната система здрава, като между всяка двойка несвързани с път близки градове построил директен път. Да се докаже, че след разширението съществува пътешествие, което завършва там, откъдето е започнало и при което всеки град освен първия е посетен точно веднъж, а първият е посетен точно два пъти (в началото и в края).

Решение. На езика на графите задачата се преформулира както следва. Нека $G(V, E)$ е свързан граф с поне 3 върха. Разстояние между два върха ще наричаме минималната дължина на път от ребра от единия връх до другия. Дефинираме граф $G^3(V, E^3)$ със същото множество от върхове като G и $uv \in E^3$ точно когато разстоянието между u и v в G е най-много 3. Да се докаже, че в G^3 има Хамилтонов цикъл.

Достатъчно е да докажем твърдението, когато G е дърво (премахването на ребра в G не отслабва исканото). Ще проведем индукция по $|V|$, като базата при $|V| = 3$ е с $|E| = 2$, съответно G^3 е триъгълник и сме готови. Нека твърдението е в сила за всяко дърво, което има между 3 и $|V| - 1$ върха включително. Ще разгледаме два случая.

- Нека в G има връх w, който е съседен на поне две листа v_1 и v_2. Да означим $T = G \setminus \{v_2\}$. Ако T има два върха, то G има три и сме готови. Нека в T има поне 3 върха. От индукционното допускане в T^3 има Хамилтонов цикъл C – нека съседните върхове на v_1 в него са x и y. Сега понеже v_1y е ребро в T^3, а пътят от y до v_1 минава през w (тъй като v_1 е листо), то y е на разстояние най-много 2 от w и оттук най-много 3 от v_2, т.е. v_2y е ребро в G^3. Също, v_1v_2 е ребро в G^3 (поради пътят v_1wv_2 в G) и следователно замяната на реброто v_1y в C с ребрата v_1v_2 и v_2y води до Хамилтонов цикъл в G.

- Нека сега всеки връх в G е съседен на най-много едно листо.
  - Ако всеки връх е от степен най-много 2, то G е път и действаме така: номерираме върховете от 1 до $|V|$ и цикълът е $135\dots642$, т.е. взимаме сме нечетните номера в нарастващ ред и след това четните в намаляващ.
  - Нека a_0 е от степен поне 3 в G и нека a е връх от степен 3, който се намира на максимално разстояние от a_0 измежду всички върхове от степен 3 (ако няма връх от степен 3 освен a_0, то полагаме $a \equiv a_0$). Да забележим, че към a има *прикачен път*, т.е. път от a към листо на G, в който всички върхове освен a са от степен най-много 2 (ако има връх от степен поне 3, то излиза противоречие с максималността на a).

    Нека $b_1b_2\dots b_k$ ($k \geq 2$), където b_k е листо, е прикачен път и $A := G \setminus \{b_1, b_2, \dots, b_k\}$. В A има поне 3 върха (a и двата му останали съседа). Съгласно индукционната хипотеза съществува Хамилтонов цикъл C в A^3. Нека за момент изтрием a от A. Понеже A е дърво, то $A' = A \setminus \{a\}$ се състои от $\deg_G(a) - 1 \geq 2$ непресичащи се дървета. Да разгледаме ребро xy от C, за което x и y са в различни дървета на A'. Тогава път между тях в A може да има само през a, следователно един от тях е съсед на a в A, без ограничение x. Сега образуваме следния цикъл: $\dots xb_2b_4\dots b_3b_1y\dots$ – тук първо четните b-та са подредени в нарастващ ред, а после нечетните в намаляващ. Това е Хамилтонов цикъл в G, с което индукцията е завършена.

Оценяване. 4 т. за случая на две листа с общ съсед, 8 т. за случая на липсата на такива листа, от които 3 т. за фокусиране върху връх с прикачен път

Задача 8. Съществуват ли естествено число n и реални числа $a_0, a_1, \dots, a_n$, всяко равно на 1 или (-1), за които реалният полином $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ се дели на реалния полином $x^{2023} - 2x^{2022} + c$, ако: а) $c = 1$ б) $c = -1$?

(За полиноми $P(x)$ и $Q(x)$ с реални коефициенти казваме, че $P(x)$ се дели на $Q(x)$, ако съществува полином $R(x)$ с реални коефициенти, такъв че $P(x) = Q(x)R(x)$.)

Решение. а) Да! Например ако умножим с $1 + x + x^2 + \cdots + x^{2021} + x^{2022}$, ще получим $1 + x + x^2 + \cdots + x^{2021} - x^{2022} - x^{2023} - \cdots - x^{4044} + x^{4045}$.

б) Не! Да допуснем противното и нека $Q(x) = x^{2023} - 2x^{2022} - 1 = x^{2022}(x-2) - 1$. Явно $Q(2) < 0$ и $Q(3) > 0$, значи от теоремата на Болцано-Вайерщрас Q има реален корен $\alpha \in (2, 3)$. Този корен трябва да нулира делимото, откъдето чрез неравенството на триъгълника получаваме

$$\alpha^n = \left| -\sum_{j=0}^{n-1} \frac{a_j}{a_n} \alpha^j \right| \leq \sum_{j=0}^{n-1} \left| \frac{a_j}{a_n} \alpha^j \right| = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha^j = \frac{\alpha^n - 1}{\alpha - 1} < \alpha^n - 1$$

което е противоречие.

Оценяване. 4 т. за а); 8 т. за б), от които 2 т. за идеята да се търси противоречие чрез корен и 1 т. за намиране на реален корен в подходящ интервал; в б) се присъжда 1 т., ако е доказано, че коефициентите на частното са цели и няма други съществени приноси