Министерство на Образованието и Науката
Съюз на Математиците в България

Зимни Математически Състезания
Плевен, 3–5 февруари, 2006 г.

Задача 10.1. Дадено е неравенството

$$\sqrt{x}+\sqrt{2-x}\geq\sqrt{a},$$

където a е реален параметър.

а) Да се реши неравенството при $a=3$.

б) Да се намерят стойностите на a, за които неравенството има решения и множеството от решенията му е интервал с дължина, ненадминаваща $\sqrt{3}$.

Решение: а) При $a=3$ и $x\in[0,2]$ неравенството е равносилно с $2\sqrt{x(2-x)}\geq 1$ или $4x^2-8x+1\leq 0$. Следователно решенията му са

$$x\in\left[\frac{2-\sqrt{3}}{2},\frac{2+\sqrt{3}}{2}\right].$$

б) При $a\geq 0$ и $x\in[0,2]$ неравенството е равносилно с $2\sqrt{x(2-x)}\geq a-2$. Ако $a\leq 2$, то всяко $x\in[0,2]$ е решение и условието не е изпълнено. Нека $a>2$. Тогава неравенството е равносилно с $4x(2-x)\geq(a-2)^2$ (оттук следва и $x\in[0,2]$) или $4x^2-8x+a^2-4a+4\leq 0$. Ако $D=16(4a-a^2)<0$, то полученото квадратно неравенство няма решение и условието отново не е изпълнено. Нека $D\geq 0$, т.е. $a\in(2,4]$. Сега решенията на квадратното неравенство са $x\in[x_1,x_2]$, където $x_1\leq x_2$ са корените на лявата му страна и условието става $x_2-x_1\leq\sqrt{3}$. Имаме

$$x_2-x_1=\sqrt{(x_2-x_1)^2}=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{4a-a^2}$$

и $\sqrt{4a-a^2}\leq\sqrt{3}$ е равносилно с $a^2-4a+3\geq 0$. Оттук и от $a\in(2,4]$ получаваме търсените стойности на параметъра: $a\in[3,4]$.

Задача 10.2. На страните AB и BC на успоредника $ABCD$ са построени точки E и F, така че DE разполовява ъгъл ADF и $AE+CF=DF$. Права през C, перпендикулярна на DE, пресича страната AD в точка L и диагонала BD в точка H. Нека DE пресича AC в точка N.

а) Да се докаже, че $AE=DL$;

б) Ако $HN||AD$, да се докаже, че $BC=CD$;

в) Ако $HN||AD$, да се докаже, че $ABCD$ е квадрат.

Решение: а) Нека $M\in DE\cap CL$, $K\in DF\cap CL$. Тогава DM е височина и ъглополовяща в $\triangle LKD$, значи $DL=DK$. Имаме $\triangle LKD\sim\triangle CKF$, така че $KF=CF$ и значи $AE=DF-CF=DF-KF=DK=DL$.

б) От подобията $\triangle ANE\sim\triangle CND$, $\triangle HNC\sim LAC$ и $\triangle LHD\sim\triangle CHB$ имаме

$$\frac{AE}{CD}=\frac{AN}{NC}=\frac{LH}{HC}=\frac{DL}{BC}.$$

Тъй като $AE=DL$, получаваме $BC=CD$.

в) От б) следва, че $ABCD$ е ромб, така че $DB\perp AC$ и значи H е ортоцентър на $\triangle DNC$. Оттук $HN\perp DC$, така че $AD\perp DC$ и $ABCD$ е квадрат.

Задача 10.3. Да се реши в естествени числа t, x, y, z уравнението

$$2^t = 3^x 5^y + 7^z.$$

Решение: От даденото уравнение получаваме $2^t \equiv 1 \mod 3$ и оттук 2 дели t. Също така получаваме $2^t \equiv 2^z \mod 5$ или (очевидно $t > z$) $2^{t-z} \equiv 1 \mod 5$ и оттук 4 дели $t-z$, така че 2 дели z. По-нататък, имаме (очевидно $t > 4$) $0 \equiv 3^x(-3)^y+(-1)^z \mod 8$ или $3^{x+y} \equiv (-1)^{y+1} \mod 8$. Ако 2 дели y, то $3^{x+y} \equiv -1 \mod 8$, което е невъзможно. Значи 2 не дели y и $3^{x+y} \equiv 1 \mod 8$, така че 2 дели $x + y$ и оттук 2 не дели x. Да положим $t = 2m(m \geq 3), z = 2n(n \geq 1)$ и да запишем уравнението във вида

$$(2^m - 7^n)(2^m + 7^n) = 3^x 5^y.$$

Лесно се вижда, че $(2^m-7^n, 2^m+7^n) = 1$. Следователно имаме следните три случая:

1) $2^m - 7^n = 3^x, 2^m + 7^n = 5^y$;

2) $2^m - 7^n = 5^y, 2^m + 7^n = 3^x$;

3) $2^m - 7^n = 1, 2^m + 7^n = 3^x 5^y$.

В случаите 1) и 2) имаме $2^m \mp 7^n = 3^x$. Оттук (предвид $m \geq 3$ и 2 не дели x) следва $\mp(-1)^n \equiv 3 \mod 8$, т.е. $3 \equiv \pm 1 \mod 8$, което е невъзможно.

В случай 3) от $2^m - 7^n = 1$ следва $2^m \equiv 1 \mod 7$ и оттук 3 дели m. Нека $m = 3k(k \geq 1)$. Тогава $(2^k-1)(2^{2k}+2^k+1) = 7^n$. Лесно се вижда, че $(2^k-1, 2^{2k}+2^k+1) = 1$ или 3. Следователно $2^k - 1 = 1, 2^{2k} + 2^k + 1 = 7^n$. Оттук последователно получаваме $k = 1, n = 1, m = 3, t = 6, z = 2$ и (от $2^m + 7^n = 3^x 5^y$) $x = 1, y = 1$.

Окончателно, единственото решение е $t = 6, x = 1, y = 1, z = 2$.

Задача 10.4. В двора на крал Артур има 40 рицари, които всяка сутрин се дуелират по двойки (всеки има по един противник на сутрин), а всяка вечер сядат около кръгла маса (без да се местят по време на вечерята).

а) Колко най-малко сутрини са необходими на крал Артур, за да организира дуелите така, че всеки двама рицари да са се дуелирали поне веднъж?

б) Колко най-малко вечери са необходими, за да може всеки двама рицари да са били съседи на масата поне два пъти?

Решение: а) Двойките рицари са $40.39/2 = 20.39$. Понеже на сутрин се образуват по 20 двойки, необходими са не по-малко от 39 сутрини. За 39 сутрини това може да се извърши по следния начин: разполагаме 39 от рицарите A_1, A_2, ..., A_{39} във върховете на правилен 39-ъгълник, а последния (B) поставяме в центъра. През сутрин номер i, нека B се дуелира с A_i, а останалите дуели да са съставени от хордите $A_{i-j}A_{i+j}$, перпендикулярни на BA_i (номерацията е по модул 39). Понеже 39 е нечетно, всяка хорда е перпендикулярна на единствен радиус, така че всяка двойка ще се появи в някой от 39-те дни.

б) Необходимите съседства са $40.39.2/2 = 40.39$. Понеже на вечер се образуват по 40 съседства, необходими са не по-малко от 39 вечери. За 39 вечери масата може да се подреди с помощтта на схемата от (а) по следния начин. Нека свържем всички отсечки, съответстващи на дуели в дните i и $i + 1$ (номерацията на дните също е по модул 39). Ще получим затворената веригата

$$BA_iA_{i+2}A_{i-2}A_{i+4}A_{i-4}...A_{i+38}A_{i-38}$$

(имаме $A_{i-38} = A_{i+1}$), която обхваща 40 точки без повторения (никои два номера не се различават с 39, заради четността, нито с негово кратно, понеже най-голямата разлика е $38 - (-38) < 2.39$). Значи тази верига обхваща всичките 40 точки; нека тя задава последователността на рицарите около масата през вечер i. Съгласно а), всеки двама рицари ще са били съседи два пъти: в навечерието на дуела си и на вечерта след дуела (по модул 39).