Министерство на образованието и науката
Съюз на математиците в България

Зимни математически състезания
Варна, 9 – 11 февруари 2007 г.

Задача 10.1. Дадени са функциите $f(x) = 2x^2 + 2x - 4$ и $g(x) = x^2 - x + 2$. Да се определи, за кои стойности на x:

а) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ е естествено число;

б) е изпълнено неравенството $\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} \geq \sqrt{2}$.

Решение. а) Полагаме $f(x)/g(x) = k$. След преобразуване достигаме до уравнението

$$(2-k)x^2 + (2+k)x - 2(2+k) = 0.$$

Ако $k = 2$, то $x = 2$. Нека сега $k \neq 2$. Тогава горното уравнение е квадратно и има реални корени. Следователно $D = (2+k)(18-7k) \geq 0$ и $k \in [-2, \frac{18}{7}]$. Тъй като k е естествено число, различно от 2, получаваме $k = 1$ и $x_{1,2} = (-3 \pm \sqrt{33})/2$. Окончателно търсените стойности за x са три: $x_1 = \dfrac{-3+\sqrt{33}}{2}, x_2 = \dfrac{-3-\sqrt{33}}{2}, x_3 = 2$.

б) Множеството от допустими стойности за x е $(-\infty, -2] \cup [1, +\infty)$. Лесно се проверява, че за всяко x от това обединение е изпълнено $g(x) \geq 2$. Следователно, $\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} \geq \sqrt{2}$ за $x \in (-\infty, -2] \cup [1, +\infty)$.

Задача 10.2. Даден е остроъгълен $\triangle ABC$, в който са спуснати височините BB_1 и CC_1 към страните AC и AB ($B_1 \in AC,\ C_1 \in AB$). Нека M и N са съответно средите на BB_1 и CC_1, $P = AM \cap CC_1$ и $Q = AN \cap BB_1$. Да се докаже, че

а) точките M, N, P и Q лежат на една окръжност;

б) ако точките B, C, P и Q лежат на една окръжност, то $\triangle ABC$ е равнобедрен.

Решение. а) $\triangle ACC_1 \cong \triangle ABB_1$, следователно AN и AM са съответни медиани в подобни триъгълници. Оттук

$$\angle ANC_1 = \angle AMB_1 \ \Rightarrow \angle QNB = \angle PMQ,$$

т.е. точките M, N, P, Q лежат на една окръжност.

б) Ако точките B, C, P, Q лежат на една окръжност, то $\angle QCP = \angle QBP$. Но $\angle ACC_1 = \angle ABB_1$, следователно

$$\angle QCA = \angle PBA. \qquad (1)$$

От друга страна, от подобието на $\triangle ACC_1$ и $\triangle ABB_1$ имаме

$$\angle CAQ = \angle CAN = \angle BAM = \angle BAP. \qquad (2)$$

От (1) и (2) следва, че $\triangle ACQ \cong \triangle ABP$, откъдето

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AQ}{AP} = \frac{AM}{AN} = \frac{AB}{AC},$$

т.е. $AB^2 = AC^2$ и $AB = AC$.

Задача 10.3. Да се намерят всички естествени числа x, y, за които $xy^2 + 2y$ дели $2x^2y + xy^2 + 8x$.

Решение. Очевидно $xy^2 + 2y$ дели

$$(2x+y)(xy^2+2y) - y(2x^2y + xy^2 + 8x) = 2y^2 - 4xy,$$

т.е. $xy + 2$ дели $2y - 4x$.

1) Нека $2y - 4x \geq 0$.

1.1) Ако $x \geq 2$ имаме $xy+2 > 2y-4x$ и следователно $2y-4x = 0$. Оттук получаваме $x = a, y = 2a$. Непоредствено се получава, че в този случай $xy^2 + 2y = 4a(a^2+1)$ дели $2x^2y + xy^2 + 8x = 8a(a^2+1)$.

1.2) Ако $x = 1$, to $y^2 + 2y$ дели 8, t.e. $y = 2$. Това решение се съдържа в тези от 1.1).

2) Нека $2y - 4x < 0$, т.е. $4x - 2y > 0$. Ако $y \geq 4$, $xy + 2 > 4x - 2$. Следователно $y = 1, 2$ или 3.

2.1) В случая $y = 1$ числото $\dfrac{2x^2 + 9x}{x+2} = 2x+5-\dfrac{10}{x+2}$ е цяло, откъдето получаваме решенията $x = 3, y = 1$ и $x = 8, y = 1$.

2.2) В случая $y = 2$ числото $\dfrac{x^2 + 3x}{x+1} = x+2-\dfrac{2}{x+1}$ е цяло, т.е. $x = 1$. Това решение се съдържа в тези от 1.1).

2.3) В случая $y = 3$ числото $\dfrac{6x^2 + 17x}{9x+6}$ е цяло. Оттук следва, че $3|x$, т.е. $x = 3k$. След заместване и съкращаване получаваме, че числото $\dfrac{18k^2 + 17k}{9k+2} = (2k+1)+\dfrac{4k-2}{9k+2}$ е цяло, което е невъзможно при $k \geq 1$.

Окончателно имаме решенията $x = a, y = 2a$ за всички естествени a и $x = 3, y = 1$, $x = 8, y = 1$.

Задача 10.4. Група от k човека, всеки двама от които се познават, наричаме k-компания.

а) Да се намери минималният брой познанства в група от n човека така, че след запознаване на кои да е двама непознати възниква нова 3-компания.

б) Да се намери минималният брой познанства в група от n човека така, че след запознаване на кои да е двама непознати възниква нова 4-компания.

Решение. На езика на графите задачата се формулира по следния начин:

Да се намери минималния брой ребра в граф с n върха имащ свойството:

а) Добавянето на кое да е ново ребро води до поява на несъществуващ до момента триъгълник (3-клика).

б) Добавянето на кое да е ново ребро води до поява на нова (несъществуваща до момента) 4-клика.

а) Нека G е граф с исканото свойство, имащ n върха и минимален брой ребра. Да допуснем противното. Добавянето на ребро, свързващо два върха от различни компоненти на свързаност не води до поява на 3-клика. Минималният брой ребра в свързан граф с n върха е $n-1$. Следователно G има поне $n-1$ ребра. Лесно можем да посочим пример на граф с n върха и $n-1$ ребра, имащ желаното свойство. Това е например $K_{1,n-1}$. ($K_{m,n}$ се дефинира като граф с $m+n$ върха, които се разбиват на две множества с m и n елемента, съответно. Два върха са съседни тогава и само тогава, когато принадлежат на различни множества. Така броят на ребрата е mn.)

б) Да дефинираме граф с върхове $u_1, u_2, v_1, \ldots, v_{n-2}$, и ребра – всички двойки u_iv_j, $i = 1, 2$, $j = 1, \ldots, n-2$, заедно с u_1u_2. Този граф е с n върха, $2n-3$ ребра и добавянето на ребро увеличава броя на 4-кликите. Следователно търсеният минимален брой ребра не надхвърля $2n-3$. Ще докажем чрез индукция по n, че той е точно $2n-3$. Нещо повече – равенство се достига за граф, имащ описаната по-горе структура. Това твърдение е очевидно за $n = 4$.

Нека G е граф с n върха, имащ исканото свойство, в който броят на ребрата е минимален. Приемаме, че твърдението е доказано за графи с $n-1$ и по-малко върха. От факта, че добавянето на ребро води до увеличаване на броя на 4-кликите следва, че в G съществуват върхове x_1, x_2, x_3, x_4, между които има точно 5 ребра (ще считаме, че липсващотот ребро е x_1x_2). Нека G^* е графът, получен чрез идентифициране на върховете x_1 и x_2. (По-подробно: от G премахваме върховете x_1 и x_2, добавяме нов връх u и запазваме всички останали върхове. Новият връх е съседен с онези върхове, които са били съседни на поне един от x_1 и x_2; всички ребра между стари върхове се запазват.) Очевидно G^* е граф с $n-1$ върха и притежава свойството от уловието: добавянето на ребро увеличава броя на 4-кликите. От друга страна, ако с $e(G)$ означим броя на ребрата в G, имаме $e(G^*) \leq e(G) - 2 \leq 2n - 5 = 2(n-1) - 3$. Следователно, съгласно индукционното допускане, $e(G^*) = 2n - 3$ и G^* има описаната в началото структура: два върха от степен $n-2$ и всички останали от степен 2. Поне един от върховете от степен $n-2$ е x_3 или x_4, да речем x_3. Следователно степента на x_3 в G е $n-1$.

Конструираме от G нов граф G' като изтрием върха x_3 и всички ребра, инцидентни с него. Графът G' има не повече от $n-2$ ребра, тъй като G има не повече от $2n-3$ ребра. Освен това G' притежава свойството от т. (а): добавянето на произволно ребро в него води до поява на нова 3-клика. Следователно, $G' = K_{1,n-2}$ (оt т. (а)). Сега лесно се получава, че G има описаната в началото структура.

Забележка. В сила е следният по-общ резултат:

Минималният брой ребра в граф G с n върха, имащ свойството, че добавянето на ново ребро води до появяване на нова r-клика е

$$e(G) = \binom{r-2}{2} + (n-r+2)(r-2).$$

Освен това $G = K_{r-2} + E_{n-r+2}$, където K_{r-2} е пълният граф с $r-2$ върха, а E_{n-r+2} е графът с $n-r+2$ върха и без ребра.

(Ако $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$ са графи, то $G_1 + G_2$ се дефинира като граф с върхове $V_1 \cup V_2$ и ребра $E_1 \cup E_2 \cup V_1 \times V_2$.)