МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА

СЪЮЗ НА МАТЕМАТИЦИТЕ В БЪЛГАРИЯ

Зимни математически състезания
31 януари – 2 февруари 2014 г., БУРГАС

Задача 10.1. Да се реши системата:

$$\left| \begin{array}{ccccccc} x^2 & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & y^2 & + & z & = & 1 \\ x & + & y & + & z^2 & = & 1 \end{array} \right. .$$

Решение. Очевидно имаме $x(x-1) = y(y-1) = z(z-1)$, откъдето следва, че поне две от числата x, y и z са равни. Нека $y = z$. Системата се преобразува във

$$x^2 + 2y = 1, x + y^2 + y = 1,$$

т.е. $y = (1-x^2)/2$. Замествайки във второто уравнение, получаваме $x^4-4x^2+4x-1 = 0$. Това уравнение може да се представи като $(x-1)^2(x^2+2x-1) = 0$, откъдето $x = 1, -1 \pm \sqrt{2}$. Оттук получаваме пет решения:

$$(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(-1+\sqrt{2},-1+\sqrt{2},-1+\sqrt{2}),(-1-\sqrt{2},-1-\sqrt{2},-1-\sqrt{2}).$$

Оценяване. (6 точки) 1 т. за доказателството на това, че две от неизвестните са равни, 1 т. за преминаване към система уравнения с две неизвестни, 3 т. за решаване на тази система, 1 т. за намиране на всички решения.

Задача 10.2. Да се намерят всички стойности на реалния параметър a, за които неравенството

$$\sqrt{1+4x} \geqq x^2 - x + a$$

няма целочислени решения.

Решение. Тъй като $1 + 4x \geqq 0$, то достатъчно е да намерим тези стойности на a, за които даденото неравенство няма неотрицателни цели решения. При $x = 0$ и $x = 2$ получаваме $a \leqq 1$, а при $x = 1$, $a \leqq \sqrt{5}$. Следователно необходимо условие е $a > \sqrt{5}$ и остава да докажем, че то е и достатъчно, т.е.

$$x^2 - x + a > \sqrt{1+4x} \text{ за всяко цяло } x > 2 \text{ при } a > \sqrt{5}.$$

Да разгледаме неравенството $x^2 - x + 1 > \sqrt{1+4x}$. След повдигане на втора степен достигаме до еквивалентното неравенство:

$$x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 6x > 0 \Leftrightarrow x(x-2)(x^2+3) > 0,$$

което очевидно е изпълнено за всяко цяло $x > 2$. Следователно

$$x^2 - x + a > x^2 - x + \sqrt{5} > x^2 - x + 1 > \sqrt{1+4x}$$

за всяко цяло $x > 2$, с което задачата е решена.

Оценяване. (6 точки) 2 т. за намиране на необходимото условие $a > \sqrt{5}$; 2 т. за свеждане на задачата до доказателство на неравенството $x^2 - x + 1 > \sqrt{1+4x}$ за всяко цяло $x > 2$; 2 т. за самото доказателство.

Задача 10.3. Нека p е просто число, за което $p \equiv 3 \pmod 4$. Нека N е броят на правоъгълниците с лице $2p^2$, чиито върхове имат целочислени координати (x, y), удовлетворяващи неравенствата $0 \le x, y \le 2p^2$. Да се намери остатъкът, който числото N дава при делене на p.

Решение. Най-напред ще определим броя на правоъгълниците със страни, успоредни на координатните оси. Очевидно, че броят на правоъгълниците със страни с дължини a и b, които са успоредни на координатните оси, и с върхове с целочислени координати (x, y), $0 \le x, y \le n$, е $(2p^2-a+1)(2p^2-b+1) \equiv (a-1)(b-1) \pmod p$. Правоъгълниците с лице $2p^2$ имат страни $2p^2 \times 1$, $p^2 \times 2$, $2p \times p$, $p \times 2p$, $2 \times p^2$, $1 \times 2p^2$. Следователно, ако броят на тези правоъгълници е K, то $K \equiv 0 \pmod p$.

Сега ще определим броя L на правоъгълниците, чиито страни не са успоредни на координатните оси. Да разгледаме три последователни върха на такъв правоъгълник, имащи координати $(0, a))$, $(b, 0)$, $(b+c, d)$. Очевидно имаме $c = ka$, $d = kb$ и $k(a^2+b^2) = 2p^2$ за някакво цяло k. (Да се аргументира, че k е цяло.). Това уравнение има решения: $k = 1$, $a = b = p$ и $k = p^2$, $a = b = 1$.

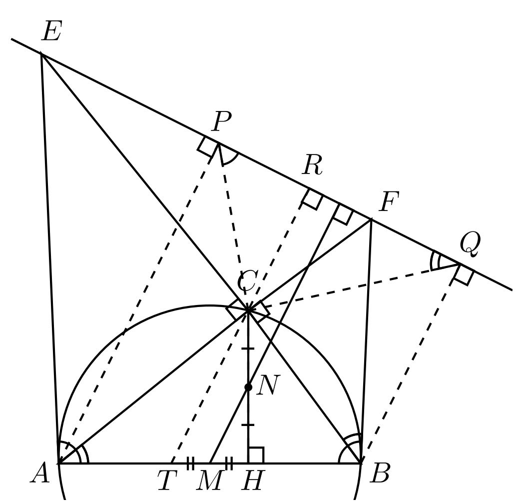
В първия случай имаме квадрата със лице $2p^2$ и неговото положение се определя еднозначно от описания около него квадрат със страна $2p$. При второто решение имаме два правоъгълника с лице $2p^2$ вписани в квадрат със страна $p^2 + 1$. Така за L получаваме

$$L \equiv (2p-1)^2 + 2p^4 \equiv 1 \pmod p.$$

Окончателно $N = K + L \equiv 1 \pmod p$.

Оценяване. (7 точки) 1 т. за намиране на броя на правоъгълниците със страни, успоредни на осите, и доказване, че този брой се дели на p; 3 т. за пълно описание на вида на правоъгълниците със страни, неуспоредни на осите; 2 т. за определяне на броя им; 1 т. за довършване.

Задача 10.4. Даден е остроъгълен $\triangle ABC$, вписан в окръжност k. Правите през върха C, перпендикулярни на страните AC и BC пресичат в точките E и F съответно допирателните към k във върховете A и B. Ако M е среда на AB, а N е среда на височината CH ($H \in AB$), то да се докаже, че правите MN и EF са перпендикулярни.



Решение. Нека P и Q са проекциите на върховете A и B върху правата EF. Тогава точките A, C, P и E лежат на окръжност с диаметър AE, а точките B, C, F и Q лежат на окръжност с диаметър BF. Следователно $\sphericalangle CPQ = \sphericalangle CAE = \sphericalangle CBA$ и $\sphericalangle CQP = \sphericalangle CBF = \sphericalangle CAB$, т.е. $\triangle CPQ \sim \triangle CBA$.

Нека правата през върха C, перпендикулярна на EF пресича EF в точка R и AB в точка T. От факта, че $AP \parallel MR \parallel BQ$ и $\triangle CPQ \sim \triangle CBA$ следва, че

$$\frac{AT}{AB} = \frac{PR}{PQ} = \frac{BH}{BA},$$

т.е. $AT = BH$ и M е среда на TH. Тогава MN е средна отсечка в $\triangle THC$, $MN \parallel TC$ и следователно $MN \perp EF$.

Оценяване. (7 точки) 2 т. за построяване на точките P и Q и $\triangle CPQ \sim \triangle CBA$; 3 т. за построяване на точката T и $MT = MH$; 2 т. за довършване на решението.