Министерство на Образованието и Науката
Съюз на Математиците в България

Зимни Математически Състезания
Плевен, 3–5 февруари, 2006 г.

Задача 11.1. Да се реши уравнението

$$\log_a(a^{2(x^2+x)} + a^2) = x^2 + x + \log_a(a^2+1),$$

където a е реален параметър.

Решение: Очевидно имаме $a^{x^2+x}(a^2+1) = a^{2(x^2+x)} + a^2$. Полагайки $u = a^{x^2+x}$, получаваме квадратното уравнение $u^2 - (a^2+1)u + a^2$, което има корени 1 и a^2. За x получаваме съответно $x^2 + x = 0$ и $x^2 + x - 2 = 0$. Окончателно получаваме, че за всяко $a \in (0,1) \cup (1,+\infty)$ уравнението има четири корена $x = -2, -1, 0, 1$.

Задача 11.2. Даден е $\triangle ABC$, в който $\sphericalangle ACB = 60^\circ$. Редицата от точки $A_0, A_1, \dots, A_{2006}$ е дефинирана така: $A_0 = A$, A_1 е петата на перпендикуляра от A_0 към правата BC, A_2 е петата на перпендикуляра от A_1 към правата AC и т.н., A_{2006} е петата на перпендикуляра от A_{2005} към правата AC. По аналогичен начин е дефинирана редицата $B_0, B_1, \dots, B_{2006}$: $B_0 = B$, B_1 е петата на перпендикуляра от B_0 към правата AC и т.н. Да се докаже, че правата $A_{2006}B_{2006}$ се допира до вписаната в $\triangle ABC$ окръжност тогава и само тогава, когато

$$\frac{AC+BC}{AB} = \frac{2^{2006}+1}{2^{2006}-1}.$$

Решение: Последователно имаме $CA_1 = \frac{1}{2}CA_0$, $CA_2 = \frac{1}{4}$ и т.н. Ясно е, че $CA_{2006} = \frac{1}{2^{2006}}CA_0 = \frac{1}{2^{2006}}CA$ и аналогично $CB_{2006} = \frac{1}{2^{2006}}CB$. От обратната теорема на Талес следва, че $A_{2006}B_{2006} \parallel AB$, като $A_{2006}B_{2006} = \frac{1}{2^{2006}}AB$. Правата $A_{2006}B_{2006}$ се допира до вписаната в $\triangle ABC$ окръжност тогава и само тогава, когато четириъгълникът $ABB_{2006}A_{2006}$ е вписан. Последното е еквивалентно на

$$\begin{aligned} AB + A_{2006}B_{2006} = AA_{2006} + BB_{2006} \quad &\Leftrightarrow \quad AB + \frac{1}{2^{2006}}AB = \frac{2^{2006}-1}{2^{2006}}(AC+BC) \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{AC+BC}{AB} = \frac{2^{2006}+1}{2^{2006}-1}. \end{aligned}$$

Задача 11.3. Да се намерят всички реални числа x, y, z, за които

$$a(\cos 2x + \cos 2y + \cos 2z) + 2(1-a)(\cos x + \cos y + \cos z) + 6 = 9a,$$

където a е целочислен параметър.

Решение: С помощта на формулата $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$ записваме уравнението във вида

$$a(\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z) + (1-a)(\cos x + \cos y + \cos z) + 3 - 6a = 0.$$

Да разгледаме функцията $f(t) = at^2 + (1-a)t + 1 - 2a$, $t \in [-1,1]$. Корените на квадратното уравнение $f(t) = 0$ са $t_1 = -1$ и $t_2 = \frac{2a-1}{a}$, $a \neq 0$. Имаме три възможности:

1) $a < 0$. Имаме $\frac{2a-1}{a} > 1$ и от свойствата на квадратната функция заключаваме, че $f(t) \geq 0$ за всяко $t \in [-1,1]$, като $f(t) = 0$ тогава и само тогава, когато $t = -1$.

2) $a = 0$. Имаме $f(t) = t + 1 \geq 0$ за всяко $t \in [-1,1]$, като $f(t) = 0$ тогава и само тогава, когато $t = -1$.

3) $a > 0$. Понеже a е цяло число, имаме $a \geq 1$. Сега $\frac{2a-1}{a} \geq 1$, като равенство се достига само при $a = 1$. От графиката на $f(t)$ се вижда, че $f(t) \geq 0$ за всяко $t \in [-1,1]$, като $f(t) = 0$ за $t = -1$ при $a > 1$ и $f(t) = 0$ за $t = \pm 1$ при $a = 1$.

Тъй като разглежданото уравнение има вида $f(\cos x) + f(\cos y) + f(\cos z) = 0$, горните разсъждения показват, че решенията му са:

Ако $a \in \mathbb{Z}$, $a \neq 1$, то $\cos x = \cos y = \cos z = -1$, т.е. $x = (2k+1)\pi$, $y = (2l+1)\pi$, $z = (2m+1)\pi$, където $k, l, m \in \mathbb{Z}$.

Ако $a = 1$, то освен горното решение имаме още $\cos x = \cos y = \cos z = 1$, т.е. $x = 2r\pi$, $y = 2s\pi$, $z = 2t\pi$, където $r, s, t \in \mathbb{Z}$.

Задача 11.4. Едно число с 2006 цифри наричаме "лошо", ако всяко число, образувано от три негови последователни цифри, не се дели на 3.

а) Да се намери броят на "лошите" числа, в чиито десетичен запис участват само цифрите 1, 2 и 3.

б) Нека a и b са различни "лоши" числа, в чиито десетичен запис участват само цифрите 1, 2 и 3. Ако $a + b$ е лошо число и k е броят на разредите, в които a и b имат еднакви цифри, да се намерят всички възможни стойности на k.

Решение: а) Нека $\overline{a_1a_2\ldots a_n}$ е n-цифрено, $n > 1$, число, записано с 1, 2 и 3. Тъй като точно едно от числата $\overline{a_{n-1}a_n1}$, $\overline{a_{n-1}a_n2}$, $\overline{a_{n-1}a_n3}$ се дели на 3, то две от числата $\overline{a_1a_2\ldots a_n1}$, $\overline{a_1a_2\ldots a_n2}$, $\overline{a_1a_2\ldots a_n3}$ са лоши, а едно не е. Следователно от едно n-цифрено ("лошо" или не) число, записано с 1, 2 и 3 чрез добавяне на една от тези цифри могат да се получат точно две $(n+1)$-цифрени "лоши" числа. Тъй като двуцифрените числа, записани с 1, 2 и 3, са 9, то търсеният брой е $9 \cdot 2^{2004}$.

б) Числата $122122\ldots12212$ и $233233\ldots23323$ са "лоши" числа, записани с 1, 2 и 3, чиято сума $355355\ldots35535$ също е "лошо" число. Следователно $k = 0$ е една от търсените стойности.

Нека $a = \overline{a_1a_2\ldots a_n}$ и $b = \overline{b_1b_2\ldots b_n}$ са "лоши" числа, чиято сума $a + b$ също е "лошо" число. Тогава $a_i + a_{i+1} + a_{i+2}$, $b_i + b_{i+1} + b_{i+2}$ и $a_i + a_{i+1} + a_{i+2} + b_i + b_{i+1} + b_{i+2}$ не се делят на 3. Това е възможно само когато $a_i + a_{i+1} + a_{i+2} \equiv b_i + b_{i+1} + b_{i+2} \equiv 1$ или 2 $\pmod 3$. Ако две от цифрите a_i, a_{i+1}, a_{i+2} съвпадат със съответните цифри от b_i, b_{i+1}, b_{i+2}, то от горнот следва, че и третата цифра съвпада. Продължавайки това разсъждение, ще видим, че двете числа са равни, което е невъзможно.

Следователно измежду всеки три последователни цифри на a най-много една съвпада със съответната цифра на b. От друга страна, ако $a_i = b_i$, то $a_{i+3} = b_{i+3}$ (и аналогично $a_{i-3} = b_{i-3}$). Наистина, от $a_i + a_{i+1} + a_{i+2} \equiv b_i + b_{i+1} + b_{i+2} \pmod 3$ следва, че $a_{i+1} + a_{i+2} \equiv b_{i+1} + b_{i+2} \pmod 3$. Ако $a_{i+3} \neq b_{i+3}$, то $a_i + a_{i+1} + a_{i+2} \equiv b_i + b_{i+1} + b_{i+2} \pmod 3$ е невъзможно.

Следователно, ако $k > 0$, то измежду всеки три последователни цифри на a точно една съвпада със съответната цифра на b. Това означава, че $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$ или $a_3 = b_3$. Оттук получаваме $k = 669$ или $k = 668$.