Зимни математически състезания
Варна, 9 – 11 февруари 2007 г.

Задача 11.1. Да се намерят всички стойности на реалния параметър a, за които уравнението
$$x^3 - ax^2 + (a^2-1)x - a^2 + a = 0$$
има три различни реални корена, които образуват аритметична прогресия.

Решение. Записваме уравнението във вида
$$(x-1)(x^2 + (1-a)x - a + a^2) = 0,$$
откъдето намираме $x_1 = 1$. Нека x_2 и x_3 са корените на квадратното уравнение. Ако 1 е средният член на прогресията, то $x_2 + x_3 = 2$, откъдето $a - 1 = 2$, т.е. $a = 3$. При $a = 3$ корените на квадратното уравнение не са реални.

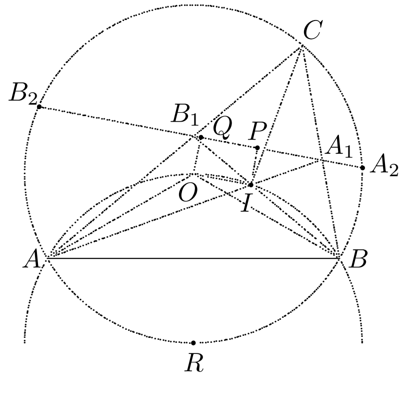
Ако $x_1 = 1$ не е среден член, то без ограничение можем да считаме, че $1 + x_2 = 2x_3$, което заедно с $x_2 + x_3 = a - 1$ дава $3x_3 = a$. Следователно $\dfrac{a}{3}$ е корен на квадратното уравнение, т.е.
$$\left(\frac{a}{3}\right)^2 + (1-a)\frac{a}{3} - a + a^2 = 0,$$
откъдето намираме $a = 0$ и $a = \dfrac{6}{7}$. При $a = 0$ получаваме $x_2 = -1$, $x_3 = 0$ и при $a = \dfrac{6}{7}$ намираме $x_2 = -\dfrac{3}{7}$ и $x_3 = \dfrac{2}{7}$. Търсените стойности са $a = 0$ и $a = \dfrac{6}{7}$.

Задача 11.2. В $\triangle ABC$, за който $\sphericalangle ACB = 60^\circ$, са прекарани ъглополовящите AA_1 и BB_1 ($A_1 \in BC$, $B_1 \in AC$). Правата A_1B_1 пресича описаната около триъгълника окръжност в точки A_2 и B_2.

а) Да се докаже, че правата OI е успоредна на A_1B_1, където O и I са съответно центърът на описаната и на вписаната окръжност за триъгълника ABC.

б) Ако R е средата на дъгата $\overset{\frown}{AB}$, несъдържаща C, а P и Q са съответно средите на A_1B_1 и A_2B_2, да се докаже, че $RP = RQ$.

Решение. а) Тъй като $\sphericalangle AOB = 2\gamma = 120^\circ$ и $\sphericalangle AIB = 180^\circ - \dfrac{\alpha+\beta}{2} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$, то точките A, O, I и B лежат на една окръжност. Тъй като $RI = RA$ (следва от равенството $\sphericalangle RIA = \sphericalangle RAI = \dfrac{\alpha+\gamma}{2}$) и аналогично $RI = RB$, то центърът на тази окръжност е точката R. От равнобедрения $\triangle AOB$ намираме $\sphericalangle BAO = 30^\circ$ и следователно $\sphericalangle OIB_1 = 30^\circ$. Тъй като $\sphericalangle AIB = 120^\circ$, то около IA_1CB_1 може да се опише окръжност, откъдето следва, че $\sphericalangle IB_1A_1 = \sphericalangle ICA_1 = 30^\circ$ и $\sphericalangle IA_1B_1 = \sphericalangle ICB_1 = 30^\circ$. Понеже $\sphericalangle OIB_1 = IB_1A_1$, то $OI \parallel A_1B_1$.



б) Тъй като $OQ \perp A_2B_2$, $IP \perp A_2B_2$ (от равнобедрения $\triangle A_1IB_1$) и $OI \parallel A_2B_2$, то $OIPQ$ е правоъгълник и симетралата на OI съвпада със симетралата на PQ. Понеже симетралата на OI минава през R, то следва, че R лежи върху симетралата на PQ, т.е. $RP = RQ$.

Задача 11.3. Имаме хартиена лента с дължина 2007. Разрязваме лентата на две части и записваме дължините на двете парчета. След това разрязваме едно от двете парчета на две части и отново записваме дължините на новополучените парчета. Продължаваме по този начин докато всички парчета са с дължина 1. Едно разрязване наричаме ”лошо”, ако двете получени части не са с равни дължини.

а) Да се намери минималния възможен брой ”лоши” разрязвания.

б) Да се докаже, че за всички случаи с минимален брой лоши разрязвания броят на различните записани числа е един и същ.

Решение. а) Нека хартиената лента е с дължина n. Да означим с $g(n)$ и $f(n)$ съответно броят на единиците в двоичното представяне на n и минималния възможен брой лоши разрязвания. Ако $n = 2^{k_1} + 2^{k_2} + \cdots + 2^{k_l}$ да разгледаме следната последователност от ходове: първо отрязваме парче с дължина 2^{k_1}, после парче с дължина 2^{k_2} и т.н. На последното разрязване получаваме две ленти с дължини $2^{k_{l-1}}$ и 2^{k_l}. Тъй като лента с дължина степен на двойката може да се разреже на части с дължина 1 без лоши ходове, то общо имаме $l - 1$ лоши хода, т.е.

$$f(n) \leq g(n) - 1. \tag{1}$$

Ще докажем с индукция по n, че $f(n) \geq g(n) - 1$. За $n = 1$ имаме $f(1) = 0$ и $g(1) = 1$, т.е. твърдението е вярно. Нека то е вярно за всички $n \leq k$, където k е естествено число и да разгледаме числото $k + 1$.

1. Нека първият ход е "лош" и са получени две ленти с дължини съответно a и b. Тогава $a + b = k + 1$ и $f(k + 1) = 1 + f(a) + f(b)$. Ако двоичните представяния на a и b нямат единици на една и съща позиция, то $g(k + 1) = g(a) + g(b)$ и следователно

$$f(k + 1) = 1 + f(a) + f(b) = 1 + g(a) - 1 + g(b) - 1 = g(k + 1) - 1.$$

Ако двоичните представяния на a и b имат поне една единица на една и съща позиция, то $g(k + 1) = g(a) + g(b) - 1$ и тогава

$$f(k + 1) = 1 + f(a) + f(b) = 1 + g(a) - 1 + g(b) - 1 = g(k + 1) > g(k + 1) - 1.$$

2. Нека първият ход не е лош, т.е. лентата е разрязана на две части с равни дължини. Тогава $g(k + 1) = g(a) = g(b)$ и тъй като при $g(k + 1) = 1$ твърдението е очевидно, то имаме

$$f(k + 1) = f(a) + f(b) = 2f(a) = 2g(a) - 2 = 2g(k + 1) - 2 > g(k + 1) - 1.$$

Следователно в този случай ще получим $f(k + 1) > g(k + 1) - 1$.

С това индукцията е завършена, откъдето

$$f(n) \geq g(n) - 1. \tag{2}$$

От (1) и (2) следва, че $f(n) = g(n) - 1$.

а) Тъй като двоичното представяне на 2007 е 11111010111, т.е. $g(2007) = 9$, то получаваме, че $f(2007) = 8$.

б) От горните разсъждения следва, че ако $f(n) = g(n) - 1$ на всеки "лош" ход лентата се разрязва на части с дължини a и b така, че двоичните представяния на a и b нямат единица на една и съща позиция. Следователно двоичните представяния на всички такива числа са различни. Освен това добрите ходове се извършват само върху ленти с дължина степен на двойката. Ясно е, че чрез пренареждане на ходовете можем да считаме, че първо са извършени всички лоши ходове. Техният брой е $g(n) - 1$ и при всеки лош ход се получават две нови числа. Следователно при лошите ходове всички записани числа са $2g(n) - 2$. Степените на 2, които са записани, са всички степени до най-високата степен в двоичното представяне на n.

Следователно броят на различните числа е равен на $2g(n) - 2 + k + 1 = 2g(n) + k - 1$, където k е най-високата степен на 2 в двоичното представяне на n.

Задача 11.4. За всяко естествено число n полагаме $a_n = 0$, ако броят на делителите на n, които са по-големи от 2007, е четно число, и $a_n = 1$, ако този брой е нечетно число. Да се определи дали числото $\alpha = 0, a_1 a_2 a_3 \ldots a_k \ldots$ е рационално.

Решение. Ще докажем, че α е ирационално. Ще използваме, че ако редицата $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k, \ldots$ не е периодична от известно място, то числото $\alpha = 0, a_1 a_2 \ldots a_k \ldots$ е ирационално. Да допуснем, че α е рационално, т.е. че от известно място разглежданата редица е периодична. Това означава, че съществуват k_0 и T, такива, че за всяко $k > k_0$ е изпълнено $a_k = a_{k+T}$. Избираме естествено число m, за което $mT > k_0$ и mT е точен квадрат. Това е възможно, защото ако $T = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_s^{\alpha_s}$ е каноничното разлагане на T, то достатъчно е да изберем $m = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \ldots p_s^{\beta_s}$, където $\alpha_i + \beta_i$ е четно число за всяко $i = 1, 2, \ldots, s$ и числата β_i са достатъчно големи. Да изберем просто число $p > 2007$, $p \neq p_i$, $i = 1, 2, \ldots, s$. Тъй като $pmT - mT$ е кратно на T, то $a_{mT} = a_{pmT}$. Но ако $\tau(k)$ е броят на делителите на k, а $f(k)$ е броят на тези, които са по-големи от 2007, то $f(pmT) = f(mT) + \tau(mT)$ и понеже $\tau(mT)$ е нечетно число, то $f(pmT)$ и $f(mT)$ са с различна четност, което е противоречие.