МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА

СЪЮЗ НА МАТЕМАТИЦИТЕ В БЪЛГАРИЯ

Зимни математически състезания
31 януари – 2 февруари 2014 г., БУРГАС

Задача 11.1. Дадена е безкрайната редица $a_1, a_2, \dots$, за която $a_2 = 2015$ и $xa_{n+1} = a_n + y$, $n \geq 1$ за някакви реални числа x и y. Да се намери y, ако е известно, че

редицата $b_1, b_2, \dots$, зададена с $b_n = a_n - 2014$, $n = 1, 2, \dots$, е безкрайна геометрична прогресия със сбор на елементите 4.

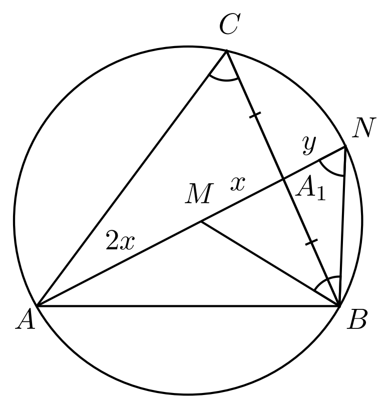
Решение. Нека редицата $b_1, b_2, \dots$ е геометрична прогресия с частно r. Тогава $b_1 = \dfrac{b_2}{r} = \dfrac{a_2 - 2014}{r}$ и следователно $S = \dfrac{b_1}{1-r} = \dfrac{\frac{a_2-2014}{r}}{1-r} = \dfrac{\frac{1}{r}}{1-r} = 4$. Последното равенство е еквивалентно на $(2r-1)^2 = 0$, т.е. $r = \dfrac{1}{2}$. Сега от равенството $xa_{n+1} = a_n + y$ след заместване в $a_{n+1} = b_{n+1} + 2014 = \dfrac{b_n}{2} + 2014$ и $a_n = b_n + 2014$ получаваме

$$x\left(\frac{b_n}{2} + 2014\right) = b_n + 2014 + y.$$

Оттук $b_n\left(\dfrac{x}{2} - 1\right) = 2014 + y - 2014x$, откъдето $\dfrac{x}{2} - 1 = 2014 + y - 2014x = 0$ (в противен случай в редицата $b_1, b_2, \dots$ ще има равни членове). Следователно $x = 2$ и $y = 2014$.

Оценяване. (6 точки) (6 точки) 2 т. за намиране на r, 2 т. за намиране на x, 2 т. за намиране на y.

Задача 11.2. Точка M е медицентър на триъгълник ABC, като $\sphericalangle AMB = 2\sphericalangle ACB$. Да се докаже, че $AM.BM = \dfrac{a^2+b^2+c^2}{9}$.



Решение. Нека точка N е втората пресечна точка на правата AM с описаната около $\triangle ABC$ окръжност. Тогава $\sphericalangle MNB = \sphericalangle ACB$ и $\sphericalangle MBN = \sphericalangle AMB - \sphericalangle MNB = \sphericalangle ACB$, т.е. $MB = MN$. Ако A_1 е средата на BC, $x = MA_1$ и $y = A_1N$ имаме $AA_1.A_1N = 3x.y = \dfrac{BC^2}{4}$, откъдето $x.y = \dfrac{BC^2}{12}$. От формулата за медианата имаме $9x^2 = \dfrac{1}{4}(2AB^2 + 2AC^2 - BC^2)$, откъдето $x = \dfrac{2AB^2 + 2AC^2 - BC^2}{36}$. Следователно

$$\begin{aligned} AM.BM &= 2x.MN = 2x(x+y) = 2x^2 + 2xy = \frac{2AB^2 + 2AC^2 - BC^2}{18} + \frac{BC^2}{6} \\ &= \frac{a^2+b^2+c^2}{9}. \end{aligned}$$

Оценяване. (6 точки) 2 т. за разглеждане на точката N, 2 т. за намиране на $y = A_1N$, 2 т. за довършване на задачата. Най-много 2 т. за получаване на други изразявания на $AM.BM$ чрез елементите на триъгълника (например получени от равенството $AM.MB\sin 2\sphericalangle ACB = \frac{2}{3}S_{ABC}$ или от косинусова теорема за $\triangle ABM$).

Задача 11.3. Даден е полином $f(x)$, за който едновременно са изпълнени свойствата:

1. Коефициентите на $f(x)$ са естествени числа.
2. Уравнението $f(x) = 0$ има поне един рационален корен.
3. Ако k е степента на $f(x)$, то стойностите на $f(x)$ за $k+1$ различни естествени числа са прости числа.

Да се докаже, че $f(x) = ax + b$ за някои две взаимнопрости естествени числа a и b.

Решение. Тъй като коефициентите на $f(x)$ са естествени числа, то корените на $f(x) = 0$ са отрицателни числа. От условието 2. следва, че

$$f(x) = (qx + p)R(x),$$

където без ограничение $p > 0$ и $q > 0$ са естествени числа, а $R(x)$ е полином от степен $k-1$ с цели коефициенти (горното разлагане следва от схемата на Хорнер). Нека x_i за $i = 1, 2, \ldots, k+1$ са такива различни естествени числа, че $f(x_i) = r_i$ и r_i са прости числа. Тъй като $qx_i + p > 1$ дели $f(x_i) = r_i$, то $qx_i + p = r_i$. Тогава $f(x_i) - (qx_i + p) = 0$ за всяко $i = 1, 2, \ldots, k+1$. Следователно $f(x) - (qx + p)$ е полином от степен k с поне $k+1$ нули, т.е. $f(x) = qx + p$. Числата q и p са взаимнопрости, защото в противен случай $f(x_i)$ не може да е просто число.

Оценяване. (7 точки) 3 т. за разлагането със съответната аргументация, че $R(x)$ е с цели коефициенти, 4 т. за довършване на решението.

Задача 11.4. Дадена е квадратна таблица с n реда и n стълба, където $n \geq 3$ е естествено число. Във всяка клетка от главния диагонал (главният диагонал съдържа всички клетки, започвайки от горния ляв ъгъл до долния десен ъгъл) без първата и последната е поставен по един пул. Разрешена е следната операция: ако в дадена клетка има пул, а в двете клетки отдясно и отгоре на дадената няма пулове, можем да премахнем този пул и да поставим по един пул в тези две празни клетки. След прилагането на краен брой операции от горния вид се оказало, че в клетките по главния диагонал няма пулове. Да се намерят всички възможни стойности на броя на пуловете върху дъската в този момент.

Решение. Да запишем във всяка от клетките, в които първоначално има пулове числото 1. По нататък, във всяка от клетките над главния диагонал да запишем $\frac{1}{2}$, във всяка от клетките над клетка с $\frac{1}{2}$ да запишем $\frac{1}{4}$ и т.н , като в последните две клетки, които са съседни на горната дясна клетка записваме $\frac{1}{2^{n-2}}$. Да забележим, че при прилагане на разрешената операция сборът от числата, съответни на клетките с пул, не се променя. В началото този сбор е $n-2$.

От друга страна, от тъждеството

$$n - 2 = \frac{n-1}{2} + \frac{n-2}{2^2} + \frac{n-3}{2^3} + \cdots + \frac{2}{2^{n-2}},$$

следва, че сборът на числата във всички клетки над главния диагонал без най-горната дясна клетка е равен на $n-2$. Понеже в най-горната дясна клетка не може да има пул, то ако в даден момент по главния диагонал няма пулове, то във всички клетки над главния диагонал, без клетката в горния десен ъгъл, трябва да има пулове. Броят им е $\frac{n^2 - n}{2} - 1$.

Не е трудно да се укаже алгоритъм, с който исканото разположение се постига.

Оценяване. (7 точки) 2 т. за намиране на инвариант, който работи, 1 т. за формулиране на тъждество, съответно на предложения инвариант, 2 т. за доказване на тъждеството, 2 т. за довършване на решението.