Министерство на Образованието и Науката
Съюз на Математиците в България

Зимни Математически Състезания
Плевен, 3–5 февруари, 2006 г.

Задача 12.1. Дадена е функцията $f(x) = \dfrac{x^2 - 2006x + 1}{x^2 + 1}$.

а) Да се реши неравенството $f'(x) \geq 0$.

б) Да се докаже, че $|f(x) - f(y)| \leq 2006$ за произволни реални числа x и y.

Решение: а) Имаме

$$f'(x) = \frac{(2x - 2006)(x^2 + 1) - 2x(x^2 - 2006x + 1)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2006(x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^2}.$$

Следователно $f'(x) \geq 0$ тогава и само тогава, когато $x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.

б) *Първи начин.* От а) следва, че $f(x)$ расте пре $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ и намалява при $x \in (-1, 1)$. Следователно най-голямата ѝ стойност е $f(-1) = 1004$, а най-малката е $f(1) = -1002$. Оттук $|f(x) - f(y)| \leq |1004 - (-1002)| = 2006$, за произволни x и y.

Втори начин. Множеството от стойностите на функцията $f(x)$ се състои от всички реални числа t, за които уравнението $\frac{x^2-2006x+1}{x^2+1} = t$ има поне едно решение. Това е изпълнено точно когато дискриминантата на квадратното уравнение $(1 - t)x^2 - 2006x + (1 - t) = 0$ е неотрицателна, т.е. $2006^2 - 4(1 - t)^2 \geq 0$. Оттук намираме $t \in [-1002, 1004]$ и следователно $|f(x) - f(y)| \leq 2006$ за произволни x и y.

Трети начин. Неравенството $|f(x) - f(y)| \leq 2006$ е еквивалентно на

$$|(x - y)(xy - 1)| \leq (x^2 + 1)(y^2 + 1).$$

Достатъчно е да докажем, че $(x^2 + 1)(y^2 + 1) \geq (x - y)(xy - 1)$ за произволни x и y. За целта записваме неравенството във вида

$$x^2(y^2 - y + 1) + x(y^2 + 1) + (y^2 - y + 1) \geq 0.$$

Тъй като $y^2 - y + 1 > 0$ и $(y^2 + 1)^2 - 4(y^2 - y + 1)^2 = -(y - 1)^2(3y^2 - 2y + 3) \leq 0$ за всяко y, заключаваме, че даденото неравенство е изпълнено за произволни x и y.

Задача 12.2. Върху диаметър на окръжност с радиус $\sqrt{5}$ са взети точки M и N, равноотдалечени от центъра ѝ. През M е построена хорда AB, а през N е построена хорда AC така, че

$$\frac{1}{MB^2} + \frac{1}{NC^2} = \frac{3}{MN^2}.$$

Да се намери разстоянието от центъра на окръжността до точките M и N.

Решение: Нека O е центърът на окръжността и нека PQ е диаметърът, върху който лежат M и N ($M \in PO, N \in QO$). Да означим $x = MO = NO$, $0 \leq x \leq \sqrt{5}$. Тогава

$$MA \cdot MB = MP \cdot MQ = (\sqrt{5} - x)(\sqrt{5} + x) = 5 - x^2.$$

Аналогично $NA \cdot NC = 5 - x^2$. Оттук получаваме

$$\frac{1}{MB^2} + \frac{1}{NC^2} = \frac{MA^2 + NA^2}{(5 - x^2)^2}.$$

От формулата за медианата AO в $\triangle MNA$ имаме

$$5 = AO^2 = \frac{1}{4}(2(MA^2 + NA^2) - 4x^2),$$

т.е. $MA^2 + NA^2 = 2(5 + x^2)$. Следователно

$$\frac{1}{MB^2} + \frac{1}{NC^2} = \frac{2(5 + x^2)}{(5 - x^2)^2} = \frac{3}{4x^2},$$

тъй като $MN^2 = 4x^2$. Оттук $x^4 + 14x^2 - 15 = 0$, т.е. $x = 1$.

Задача 12.3. Да се намери максималният брой телефонни номера, които изпълняват следните три условия:

а) всички те са петцифрени числа, като могат да започват с 0;

б) във всеки номер участват най-много две различни;

в) изтриването на произволна цифра в два произволни номера (възможно в различни позиции) не води до две идентични редици с дължина 4.

Решение: Нека C е множество от телефонни номера, което удовлетворява условията а)–в) и което е с максимална мощност. Да означим с A множеството от телефонни номера от C, в които съществува цифра, която се среща 4 или 5 пъти, а с B – множеството от тези номера от C, в които съществува цифра, която се среща точно 3 пъти. Очевидно $C = A \cup B$. Тъй като C съдържа най-много един номер, в който фиксиран символ се появява 4 или 5 пъти, то $|A| \leq 10$.

Да означим с $B_{i,j}$, $0 \leq i, j \leq 9$, множеството от номера, в които цифрата i се среща 3 пъти, а цифрата j се среща 2 пъти. Ще докажем, че максималният брой телефонни номера в $B_{i,j} \cup B_{j,i}$ е 4. Без ограничение на общността можем да разгледаме случая $i = 0$, $j = 1$. Да означим с a_i броя на телефоните от $B_{0,1} \cup B_{1,0}$ с точно i блока. (Редицата ot simvoli $a_i, \ldots, a_j$ се нарича блок, ако $a_{i-1} \neq a_i = \cdots = a_j \neq a_{j+1}$.) Ако допуснем, че $|B_{0,1} \cup B_{1,0}| = 5$, то

$$\begin{aligned} a_2 + a_3 + a_4 + a_5 &= 5 \\ 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 + 5a_5 &\leq 14 \end{aligned}$$

Последното неравенство следва от факта, че никои два номера нямат обща подредица с дължина 4. При това непосредствено се проверява, че $a_2 \leq 2$ и $a_3 \leq 2$. Следователно единствената възможност е $a_2 = a_3 = 2$, $a_4 = 1$. Такова множество от номера задължително съдържа 01110 и 10001. Сега е очевидно, че към тези два номера не може да бъде добавен телефонен номер, съставен от два блока.

От друга страна, възможно е да намерим четири думи в $B_{0,1} \cup B_{1,0}$, които удовлетворяват в), например

$$B_{0,1} \cup B_{1,0} = \{10001,\ 01010,\ 11100,\ 00111\}.$$

Множеството C може да се представи като

$$C = A \cup B = A \cup \left(\cup_{0 \leq i < j \leq 9} B_{i,j} \cup B_{j,i}\right).$$

Ясно е, че изборът на номерата в $B_{i,j} \cup B_{j,i}$ не влияе на избора на номерата в $B_{k,l} \cup B_{l,k}$ при $(i,j) \neq (k,l)$. Ясно е също така, че в A могат да бъдат избрани 10 номера, които да не влияят на избора на останалите номера от C, например

$$A = \{00000, 11111, \ldots, 99999\}.$$

Следователно търсеният максимален брой е

$$\begin{aligned} |C| &= |A| + \sum_{0 \leq i < j \leq 9} |B_{i,j} \cup B_{j,i}| \\ &= 10 + \binom{10}{2} \cdot 4 \\ &= 10 + 45 \cdot 4 = 190. \end{aligned}$$

Задача 12.4. Нека O е центърът на описаната окръжност около равнобедрен триъгълник ABC с основа AB. Правата AO пресича бедрото BC в точка D. Известно е, че $|BD|$ и $|CD|$ са цели числа, а $|AO|-|CD|$ е просто число. Да се намерят тези три числа.

Решение: Да означим $AO=R$, $BD=b$, $CD=c$ и $OD=d$. Тъй като CO е ъглополовяща в $\triangle ACD$, то

$$\frac{d}{R}=\frac{c}{b+c}.$$

От друга страна, ако правата AO пресича описаната окръжност в точка E, то от свойството на секущите AE и BC следва, че

$$(R+d)(R-d)=bc.$$

Като заместим $d=\dfrac{cR}{b+c}$, получаваме

$$R^2=\frac{(b+c)^2c}{b+2c}.$$

Нека

$$k=(b,c,R),\ m=\left(\frac{b}{k},\frac{c}{k}\right),\ R_1=\frac{R}{k},\ b_1=\frac{b}{km}\text{ и }c_1=\frac{c}{km}.$$

Тогава

$$R_1^2=\frac{m^2(b_1+c_1)^2c_1}{b_1+2c_1}.$$

Понеже $(m,R_1)=1$ и

$$(b_1+2c_1,b_1+c_1)=(b_1+2c_1,c_1)=(b_1,c_1)=1,$$

получаваме $R_1^2=(b_1+c_1)^2c_1$ и $m^2=b_1+2c_1$. Следователно c_1 е точен квадрат, например $c_1=n^2$. Тогава $c=kmc_1=kmn^2$, $b=kmb_1=km(m^2-2n^2)$, както и $R=kR_1=kn(m^2-n^2)$.

Тъй като $1>\sin\sphericalangle BAC=\frac{b+c}{2R}=\frac{m}{2n}$, то $\sqrt{2}n<m<2n$. (Обратно, при това условие триъгълникът съществува и е остроъгълен, т.е. правата AO пресича бедрото BC.) В частност, $n\geq 2$. Понеже $R-c=kn(m^2-n^2-mn)$ е просто число, следва, че n е просто числа, $k=1$ и $m^2-n^2-mn=1$, т.е. $(m-1)(m+1)=n(m+n)$. Имаме две възможности:

1) $m-1=ln$. Тогава $l(ln+2)=ln+1+n$, т.е.

$$n=\frac{1-2l}{l^2-l-1}.$$

Последното число е отрицателно при $l\geq 2$. Следователно $l=1$ и оттам $n=1$, което е противоречие.

2) $m+1=ln$. Тогава $l(ln-2)=ln-1+n$, т.е.

$$n=\frac{2l-1}{l^2-l-1}.$$

Последното число не надминава 1 при $l\geq 3$, а при $l=1$ е равно -1. Остава $l=2$ и оттам

$$n=R-c=3,\ m=5,\ b=35\text{ и }c=45.$$