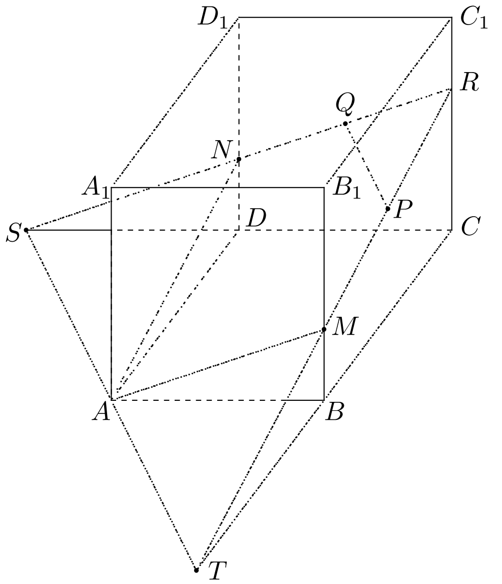
Министерство на образованието и науката
Съюз на математиците в България

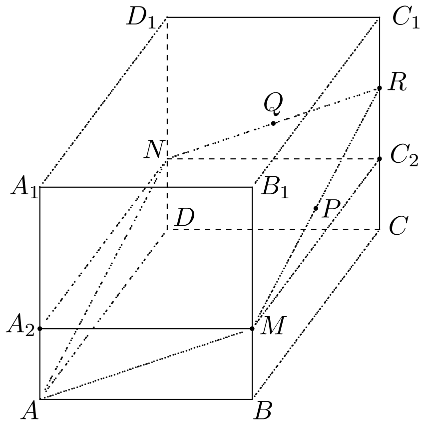
Зимни математически състезания
Варна, 9 – 11 февруари 2007 г.

Задача 12.1. Даден е куб с ръб 1. Прекарана е равнина, която минава през връх на основата на куба и центровете на двете околни стени, които не го съдържат. Да се намери отношението, в което сечението на равнината с куба дели неговия обем.

Решение. Нека P и Q са центровете на стените BCC_1B_1 и DCC_1D, и нека $\alpha = (APQ)$ (черт. 1). Тъй като PQ е средна отсечка в $\triangle DBC_1$, то $PQ||BD$. Следователно α пресича $(ABCD)$ в правата през A, която е успоредна на BD. Означаваме с T и S пресечните точки на тази права с правите CB и CD. Правите TP и SQ пресичат ръба CC_1 в една и съща точка R (пресечната точка на α и CC_1). Нека $M = TR \cap BB_1$ и $N = SR \cap DD_1$. Тогава сечението на α с куба е четириъгълникът $AMRN$ (лесно се вижда, че той е ромб). Ясно е, че $BT = BA = 1$. Следователно BM е средна отсечка в $\triangle CRT$. Тъй като $BM = RC_1 = 1 - RC$ и $\dfrac{BM}{RC} = \dfrac{1}{2}$, то $BM = \dfrac{1}{3}$. Аналогично $DN = \dfrac{1}{3}$.



черт. 1



черт. 2

Нека V е обемът на многостена ограничен от $(ABCD)$, $(AMRN)$ и околните стени на куба (черт. 2). Нека A_2 и C_2 са пресечните точки на AA_1 и CC_1 с равнината през MN, която е успоредна на $(ABCD)$. Тогава $RC_2 = RC - CC_2 = MB = AA_2 = \dfrac{1}{3}$ и следователно триъгълните пирамиди NMC_2R и NMA_2A имат равни обеми. Това показва, че $V = V_{ABCDA_2MC_2N} = \dfrac{1}{3}$. Следователно сечението дели обема на куба в отношение 1 : 2 (считано от основата ABCD).

Задача 12.2. Нека ABC е правоъгълен триъгълник с катети $AC = 1$ и $BC = 2$. През точка A_1 от катета BC, за която $A_1C \neq \dfrac{1}{3}$, е прекарана права, успоредна на AB, която пресича AC в точка B_1. Нека C_1 е петата на перпендикуляра от B_1 към AB. През C_1 е прекарана права, успоредна на AC, която пресича BC в точка A_2. Правата през A_2, успоредна на AB, пресича AC в точка B_2 и т. н. Да се пресметне:

$$\text{а) } \frac{3A_2C - 1}{3A_1C - 1}; \qquad \text{б) } \lim_{n\to\infty} S_{A_nB_nC_n}.$$

Решение. а) Нека $A_nC = x_n$. Тогава от $\triangle A_nB_nC \sim \triangle BAC$ следва, че $B_nC = \dfrac{x_n}{2}$. Понеже $\triangle AB_nC_n \sim \triangle ABC$, намираме, че $AC_n = \dfrac{2 - x_n}{2\sqrt{5}}$. Оттук $A_{n+1}C = x_{n+1} = \dfrac{2 - x_n}{5}$. Следователно $\dfrac{3x_{n+1} - 1}{3x_n - 1} = -\dfrac{1}{5}$.

б) Тъй като $A_nB_n = \dfrac{\sqrt{5}}{2}x_n$, $B_nC_n = \dfrac{2 - x_n}{\sqrt{5}}$ и $A_nB_n \perp B_nC_n$, то $S_{A_nB_nC_n} =$

$\dfrac{x_n(2-x_n)}{4}$. От а) имаме, че $x_n-\dfrac{1}{3}$ е геометрична прогресия с частно $-\dfrac{1}{5}$. Следователно $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{1}{3}$ и значи $\lim\limits_{n\to\infty} S_{A_nB_nC_n} = \dfrac{5}{36}$.

Задача 12.3. Александър и Деница играят следната игра. Александър разрязва (ако е възможно) лента с целочислена дължина на три ленти с целочислени дължини, от които само една е най-дълга. С тази най-дълга лента Деница извършва подобна операция и т.н. Играта печели този, който последен може да разреже получената от другия лента. За кои ленти с дължини точни степени (т.е. a^b, $a-1, b-1 \in \mathbb{N}$) Деница има печеливша стратегия?

Решение. Да означим с n дължината на първоначалната лента. Ясно е, че няма ход при $n = 1, 2, 3$. При $4 \le n \le 3+2+2 = 7$ Александър може да разреже лентата така, че най-голямата дължина да е по-малка от 4 и значи печели. При $n = 8, 9$ най-голямата дължина е между 4 и 7 и Деница е в печеливша позиция след ход на Александър. Аналогично при $10 \le n \le 9+8+8 = 25$ Александър има печеливша стратегия, защото може да разреже лентата така, че най-голямата дължина да е 8 или 9 и т.н. По индукция следва, че Деница има печеливша стратегия точно когато $n = 3^k$ или $n = 3^k - 1$ за някое $k > 1$.

Числата от първия вид, както и $3^2 - 1 = 2^3$, са точно степени. Ще докажем, че други няма. Нека $a^b = 3^k - 1$. Понеже $a^2 \equiv 0, 1 \pmod 3$, то b е нечетно. Тогава $(a+1)(a^{b-1} + \cdots + a + 1) = 3^k$. Оттук $a + 1 = 3^i$ и

$$3^{k-i} = a^{b-1} + \cdots + a + 1 = A(a+1) + b, \quad 0 < i < k.$$

Значи 3 дели b. За $c = a^{b/3}$ имаме, че $3^k = (c+1)((c+1)^2 - 3c)$. Следователно $c+1 = 3^j$ и $(c+1)^2 - 3c = 3^{k-j}$, $0 < j < k$. В частност, 9 дели $(c+1)^2$, но не дели $3c$. Последователно намираме, че $k - j = 1$, $c = 2$, $a = k = 2$ и $b = 3$.

Забележка. Втората част от решението е частен случай на нетривиалния факт, че 3^2 и 2^3 са единствените точни степени с разлика 1.

Задача 12.4. Да се намерят всички естествени числа n такива, че ако $a, b, c \ge 0$ и $a + b + c = 3$, то $abc(a^n + b^n + c^n) \le 3$.

Решение. При $a = 2, b = c = \dfrac{1}{2}$ и $n \ge 3$ неравенството не е изпълнено. От друга страна, при $n = 1$ то е еквивалентно на неравенството между средното аритметично и средното геометрично за три числа.

Ще докажем, че даденото неравенство е в сила и при $n = 2$. Нека $x = bc$. Тогава

$$abc(a^2 + b^2 + c^2) = ax(a^2 + (b+c)^2 - 2x).$$

Функцията $x(p - 2x)$ е растяща при $x \le \dfrac{p}{4}$. Тъй като

$$bc \le \frac{(b+c)^2}{4} \le \frac{a^2 + (b+c)^2}{4},$$

следва, че ако $b + c = b' + c'$ и $bc \le b'c'$, то

$$abc(a^2 + b^2 + c^2) \le ab'c'(a^2 + b'^2 + c'^2). \tag{1}$$

Без ограничение можем да считаме, че $b \le 1 \le c$. Полагаме $b' = 1, c' = b + c - 1$. Тъй като $b + c = b' + c'$ и $bc - b'c' = (b-1)(c-1) \le 0$, то от (1) следва, че

$$abc(a^2 + b^2 + c^2) \le a(2-a)(a^2 + 1 + (2-a)^2). \tag{2}$$

Полагаме $d = (a-1)^2$. Тогава

$$a(2-a)(a^2 + 1 + (2-a)^2) = (1-d)(3+2d) = 3 - d - 2d^2 \le 3$$

и даденото неравенство при $n = 2$ следва от (2).