МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА

СЪЮЗ НА МАТЕМАТИЦИТЕ В БЪЛГАРИЯ

Зимни математически състезания
31 януари – 2 февруари 2014 г., БУРГАС

Задача 12.1. Окръжност k се допира до параболата $y = x^2$ в две точки. Да се докаже, че:

а) центърът на k лежи на ординатната ос; б) радиусът на k е по-голям от $1/2$.

Решение. а) Нека $A_1 = (x_1, x_1^2)$, $A_2 = (x_2, x_2^2)$ са двете допирни точки, а $A = (x_0, y_0)$ е пресечната точка на допирателните към $y = x^2$ в тези точки. Понеже те са допирателни и към k, то $AA_1 = AA_2$. Имаме, че $y_0 - x_1^2 = 2x_1(x_0 - x_1)$ и $y_0 - x_2^2 = 2x_2(x_0 - x_2)$. Като извадим тези уравнения, получаваме, че $(x_1 - x_2)(x_1 + x_2 - 2x_0) = 0$. Значи $x_0 = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ и тогава $y_0 = x_1x_2$. Замествайки в равенството $(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - x_1^2)^2 = (x_0 - x_2)^2 + (y_0 - x_2^2)^2$, намираме, че $(x_1 - x_2)^3(x_1 + x_2) = 0$. И така, $x_1 + x_2 = 0$, откъдето следва исканото.

б) От а) знаем, че $A = (0, -x_1^2)$ и $M = (0, x_1^2)$, където M е средата на A_1A_2. Ако O е центърът на k, от подобието на правоъгълните триъгълници AA_1M и AOA_1 следва, че $\dfrac{A_1M}{AM} = \dfrac{OA_1}{AA_1}$, откъдето $r = \dfrac{x_1}{2x_1^2}\sqrt{x_1^2 + 4x_1^4} = \sqrt{\dfrac{1}{4} + x_1^2} > \dfrac{1}{2}$.

Оценяване. (6 точки) а) 3 т., б) 3 т.

Задача 12.2. Вписаната в $\triangle ABC$ окръжност k с център I се допира до страните BC, CA и AB съответно в точки A_1, B_1 и C_1. Отсечката BI пресича k в точка D, а правата през D и средата на B_1C_1 пресича за втори път k в точка E. Да се докаже, че точките A, D, I и E лежат на една окръжност.

Решение. Първо ще докажем следната известна

Лема. Правата AE е симедиана в $\triangle B_1C_1E$, т.е. ако M е среда на B_1C_1 и $AE \cap B_1C_1 = N$, то $\sphericalangle B_1EM = \sphericalangle C_1EN$.

Доказателство. Понеже $AB_1 = AC_1$ и $B_1M = C_1M$, от синусовата теорема за $\triangle AEB_1$, $\triangle AEC_1$, $\triangle B_1EM$ и $\triangle C_1EM$ имаме, че

$$\frac{\sin \sphericalangle AEB_1}{\sin \sphericalangle AEB_1} = \frac{\sin \sphericalangle AB_1E}{\sin \sphericalangle AC_1E} = \frac{\sin \sphericalangle B_1C_1E}{\sin \sphericalangle C_1B_1E} = \frac{\sin \sphericalangle C_1EM}{\sin \sphericalangle B_1EM},$$

откъдето следва твърдението на лемата.

По-нататък, ако $AB \cap B_1E = F$, то $\sphericalangle AED = \sphericalangle AEF + \sphericalangle FEC_1 + \sphericalangle C_1EM = 2\sphericalangle C_1EM + \sphericalangle C_1A_1B_1 = \sphericalangle C_1B_1A_1 + \sphericalangle C_1A_1B_1 = 90^\circ + \gamma/2 = \sphericalangle AID$, с което задачата е решена.

Оценяване. (6 точки) 3 т. за лемата (1 т., ако е без доказателство) и 3 т. за довършване на решението.

Задача 12.3. Нека $k \in (0,1)$ е реален параметър. Да се намери най-голямата стойност на израза $\dfrac{x+k^2y+(1-k)^2xy}{(1+x+y)^2}$ при $x, y \geq 0$.

Решение. Търсената стойност е $\dfrac{1}{4}$.

Да означим израза с $f(x,y)$. Очевидно $f(x,0) = \dfrac{x}{(1+x)^2} \leq 1/4$, като равенство се достига само при $x = 1$.

Сега е достатъчно е да покажем, че

$$f(ty,y) \leq m_t := \frac{1}{4}\left(\frac{t+k^2}{t+k}\right)^2 < \frac{1}{4}$$

при $t, y \geq 0$. Това е еквивалентно на

$$(t+k^2)y + (1-k)^2ty^2 \leq m_t(1+(t+1)y)^2, \quad \text{т.е.}$$

$$(m_t(t+1)^2 - (1-k)^2t)y^2 + (2m_t(t+1) - t - k^2)y + m_t \geq 0.$$

Предвид дефиницията на m_t, дискриминантата на лявата част е 0. Остава да използваме, че $m_t > 0$.

Оценяване. (7 точки) 1 т. за максимума на $f(x,0)$, 1 т. за разглеждане на $f(ty,y)$ и 5 т. за довършване на решението.

Задача 12.4. Дадена е квадратна таблица с n реда и n стълба, където $n \geq 3$ е естествено число. Във всяка клетка от главния диагонал (главният диагонал съдържа всички клетки, започвайки от горния ляв ъгъл до долния десен ъгъл) без първата и последната е поставен по един пул. Разрешена е следната операция: ако в дадена клетка има пул, а в двете клетки отдясно и отгоре на дадената няма пулове, можем да премахнем този пул и да поставим по един пул в тези две празни клетки. След прилагането на краен брой операции от горния вид се оказало, че в клетките по главния диагонал няма пулове. Да се намерят всички възможни стойности на броя на пуловете върху дъската в този момент.

Решение. Да запишем във всяка от клетките, в които първоначално има пулове числото 1. По нататък, във всяка от клетките над главния диагонал да запишем $\dfrac{1}{2}$, във всяка от клетките над клетка с $\dfrac{1}{2}$ да запишем $\dfrac{1}{4}$ и т.н , като в последните две клетки, които са съседни на горната дясна клетка записваме $\dfrac{1}{2^{n-2}}$. Да забележим, че при прилагане на разрешената операция сборът от числата, съответни на клетките с пул, не се променя. В началото този сбор е $n-2$.

От друга страна, от тъждеството

$$n-2 = \frac{n-1}{2} + \frac{n-2}{2^2} + \frac{n-3}{2^3} + \cdots + \frac{2}{2^{n-2}},$$

следва, че сборът на числата във всички клетки над главния диагонал без най-горната дясна клетка е равен на $n-2$. Понеже в най-горната дясна клетка не може да има пул, то ако в даден момент по главния диагонал няма пулове, то във всички клетки над главния диагонал, без клетката в горния десен ъгъл, трябва да има пулове. Броят им е $\dfrac{n^2-n}{2} - 1$.

Не е трудно да се укаже алгоритъм, с които исканото разположение се постига.

Оценяване. (7 точки) 2 т. за намиране на инвариант, който работи, 1 т. за формулиране на тъждество, съответно на предложения инвариант, 2 т. за доказване на тъждеството, 2 т. за довършване на решението.