Условия и кратки решения

Задача 8.1. Да се решат уравненията $x^3 - 6x^2 + 11x + a = 0$ и $x^3 + 4x^2 + x + a = 0$, където a е параметър, ако е известно, че те имат общ корен.

Решение. Нека x_0 е общият корен на двете уравнения, т.е. $x_0^3 - 6x_0^2 + 11x_0 + a = 0$ и $x_0^3 + 4x_0^2 + x_0 + a = 0$. Елиминирайки a, получаваме $10x_0^2 - 10x_0 = 0$, т.е. $x_0 = 1$ или $x_0 = 0$.

Ако общият корен е $x_0 = 1$, то $a = -x_0^3 - 4x_0^2 - x_0 = -6$. Тогава уравненията са

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x^3 - x) - 6(x^2 - 2x + 1) = (x - 1)(x - 2)(x - 3) = 0$$

с корени 1, 2 и 3, и

$$x^3 + 4x^2 + x - 6 = (x^3 - x^2) + (x - x^2) + 6(x^2 - 1) = (x - 1)(x + 2)(x + 3)$$

с корени 1, -2 и -3.

Ако общият корен е $x_0 = 0$, то $a = -x_0^3 - 4x_0^2 - x_0 = 0$ и уравненията са $x(x^2 - 6x + 11) = 0$ с единствен реален корен 0 и $x(x^2 + 4x + 1) = 0$ с корени 0 и $-2 \pm \sqrt{3}$.

Оценяване. (6 точки) 2 т. за намиране на възможните общи корени, 3 т. за случая на общ корен 1, 1 т. за случая на общ корен 0.

Задача 8.2. Нека $ABCD$ е изпъкнал четириъгълник, който не е успоредник, а точките M и N са съответно средите на диагоналите AC и BD. Правата MN пресича страните AD и BC съответно във вътрешни точки P и Q. Да се докаже, че $\sphericalangle APN = \sphericalangle BQM$ тогава и само тогава, когато $AD = BC$.

Решение. Нека K е средата на AB. Тогава KM и KN са средни отсечки съответно на триъгълниците ABC и ABD. Ако точките P, N, M и Q са в този ред върху правата PQ, имаме $\sphericalangle APN = \sphericalangle KNM$ и $\sphericalangle BQM = \sphericalangle KMN$. Освен това имаме $KN = AD/2$ и $KM = BC/2$. Следователно задачата се свежда до това, че един триъгълник е равнобедрен тогава и само тогава, когато ъглите при основата му са равни.

Случаят, в който редът върху правата PQ е P, M, N и Q, води до $\sphericalangle APN = \sphericalangle KNQ$ и $\sphericalangle BQM = \sphericalangle KMP$ и преминаването към допълнителни ъгли води до горния резултат.

Оценяване. (6 точки) 1 т. за въвеждането на точка K, 2 т. за равенството на прилежащите ъгли, 1 т. за равенствата от средните отсечки, 1 т. за свеждане до еквивалентната задача, 1 т. за правилно отчитане на втория случай.

Задача 8.3. Едно естествено число наричаме добро, ако се записва с помощта на само две различни цифри, едната от които е 0, и притежава следното свойство: каквато и ненулева цифра a да допишем отдясно на това число, се получава число, което се дели на a.

а) Да се намери най-малкото добро число.

б) Да се докаже, че съществуват безбройно много добри числа, в които участва само една нула.

Решение. Ако N е добро число, то $\overline{Na} - a = 10N$ се дели на a за всяка ненулева цифра a. Оттук при $a = 7$ и $a = 9$ следва, че N се дели на 7 и на 9, а при $a = 8$, заключаваме, че N се дели на 4. Да отбележим още, че N е кратно на число, което се записва само с цифрите 1 и 0, и че трите най-малки числа, които се записват само с 1 и 0 и се делят на 7, са 1001, 10010 и 10101 (по-малките кандидати се отхвърлят лесно), а следващите са с поне 6 цифри.

а) Нека N е най-малкото добро число. Ако ненулевата цифра на N не се дели на 3, от $9|N$ следва, че N има поне 9 цифри. Ако ненулевата цифра на N е 3, то N завършва на 00 и 3 се среща поне три пъти. Това означава, че N е поне 7-цифрено. Ако ненулевата цифра на N е 6, то N завършва на 0 и 6 се среща поне три пъти. Това означава, че $N = 606060$ или N е поне 7-цифрено. Накрая, ако ненулевата цифра е 9, то N завършва на 00 и значи $N = 900900$ или N има поне 7 цифри.

Следователно най-малкото добро число е 606060.

б) Такива са например числата $66\dots60$, където броят на шестиците е кратен на 6.

Оценяване. (7 точки) 2 т. за намиране на условията за делимост на 7, 8 и 9, в а) – 1 т. за случая на цифра, взаимнопроста с 3, 2 т. за случаите на цифра 3, 6, 9, 2 т. за б).

Задача 8.4. Правоъгълник 5×11 е разграфен на 55 единични квадратчета. Ани и Боби играят следната игра. Отначало Ани оцветява всяко квадратче в бяло, зелено или червено. След това Боби избира две едноцветни квадратчета измежду оцветените от Ани, имащи обща страна или връх, и ги оцветява в синьо. По-нататък Боби продължава да повтаря същото действие, докато то е възможно. Когато Боби приключи, Ани му плаща толкова стотинки, колкото е броят на сините квадратчета.

а) Ако Ани се стреми да плати колкото се може по-малко, а Боби – да получи колкото се може повече, колко стотинки ще плати Ани на Боби?

б) Как ще се промени отговорът на въпроса в а), ако Ани няма право да използва зелен цвят?

Решение. а) Отговор: 20. Нека Ани оцвети в бяло нечетните полета от нечетните редове и в зелено четните полета от нечетните редове, а останалите полета – в червено. Тогава Боби няма да може да преоцветява бели, нито зелени полета, а от всеки четен ред ще може да преоцвети в синьо най-много 5 двойки червени полета, така че ще получи не повече от $2.5.2 = 20$ стотинки. От друга страна, от правоъгълника можем да отделим 10 квадрата 2×2 и при всяко оцветяване във всеки от тях ще има поне две едноцветни полета, така че Боби може да си гарантира поне 20 стотинки.

б) Отговор: 36. Ако Ани оцвети в бяло нечетните полета от нечетните редове, а в червено останалите, то Боби няма да може да преоцветява бели полета. Червените полета ще са $55 - 18 = 37$, така ще от тях Боби ще може да оцвети по двойки най-много 36. Ако номерираме полетата от таблицата така:

1	1	2	5	5	9	9	10	11	11	12
1	2	2	5	6	9	10	10	11	12	12
3	3		6	6	13	13	15	15	17	17
3	4	7	8	8	13	14	15	16	17	18
4	4	7	7	8	14	14	16	16	18	18

то при всяко оцветяване на Ани сред всеки три полета с даден номер ще има поне две едноцветни (съседни), така че Боби може да си гарантира поне $18.2 = 36$ стотинки.

Оценяване. (7 точки) 3 т. ($2+1$ съответно за горна и долна оценка) за а) и 4 т. ($2+2$ за горна и долна оценка) за б).

Задача 9.1. Да се намерят всички стойности на реалния параметър a, за които квадратните уравнения $x^2+2a^2x+2a=0$ и $y^2+y+a=0$ имат съответно корени x_1, x_2 и y_1, y_2 и

$$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=2(y_1y_2+y_1+y_2).$$

Решение. От формулите на Виет следва, че

$$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1x_2}=\frac{4a^4-4a}{2a}=2a^3-2 \text{ и } y_1y_2+y_1+y_2=a-1.$$

Равенството от условието е еквивалентно на $a^3-1=a-1 \iff a(a+1)(a-1)=0$ и следователно $a=0,\pm 1$. Тъй като $x_1x_2\neq 0$, то $a\neq 0$. При $a=1$ и двете уравнения нямат корени. При $a=-1$ уравненията имат корени и следователно $a=-1$ е единствената стойност с исканото свойство.

Оценяване. (6 точки) 3 т. за получаване на уравнението $a^3-1=a-1$, 1 т. за решаване $a=0,\pm 1$, по 1 т. за отхвърляне на случаите $a=0$ и $a=1$.

Задача 9.2. В неравнобедрен остроъгълен триъгълник ABC е построена ъглополовящата CL на $\sphericalangle ACB$. Точките M, N и P са среди съответно на страните AB, BC и AC, а точка T е допирната точка на вписаната в $\triangle ABC$ окръжност и страната AB. Описаната окръжност около $\triangle NPL$ пресича CL в точка D. Ако L е среда на MT, да се намери отношението $\dfrac{CD}{DL}$.

Решение. *Първи начин.* Да означим средата на дъгата AB, която не съдържа точката C с K. Тогава $MK\perp AM$ и $\triangle MKL\cong\triangle TIL$ (понеже $\sphericalangle KLM=\sphericalangle ILT$ като връхни, $\sphericalangle KML=\sphericalangle ITL=90^\circ$ и $ML=LT$ по условие). Следователно $KM=IT=IF$, където F е допирната точка на вписаната окръжност със страната AC.

Тъй като $\sphericalangle KAM=\sphericalangle KCB=\sphericalangle ICP$, то $\triangle MKA\cong\triangle FIC$, откъдето $CI=AK$. От известния факт, че $KA=KB=KI$ следва, че $CI=AK=BK=KI$, т.е. I е среда на CK.

Понеже IP е средна отсечка в $\triangle AKC$, то $IP=\dfrac{1}{2}AK=\dfrac{1}{2}IK=IL$ и аналогично $IN=IL$. Следователно $IP=IN=IL$, т.е. I е център на описаната окръжност за $\triangle PLN$. Тогава DI е диаметър в тази окръжност и $DI=IL=LK$. От тук и от $CI=IK$ следва, че $CD=DI$, т.е. $\dfrac{CD}{DL}=\dfrac{1}{2}$.

Втори начин. От свойството на ъглополовящата следва, че $\dfrac{AC}{BC}=\dfrac{AL}{BL}$, откъдето намираме $AL=\dfrac{cb}{a+b}$ и $BL=\dfrac{ca}{a+b}$. Тъй като $AM=\dfrac{c}{2}$, $BT=\dfrac{a+c-b}{2}$, то $ML=LT$ е еквивалентно на $AL-AM=BL-BT$. След заместване със съответните изрази, получаваме

$$(b-a)(b+a-2c)=0$$

и тъй като триъгълникът не е равнобедрен, намираме $c=\dfrac{a+b}{2}$.

Тогава $AL = \dfrac{b}{2}$ и $BL = \dfrac{a}{2}$. Това означава, че $\triangle ALP$ и $\triangle BLN$ са равнобедрени и ъглополовящите AI и BI са симетрали на отсечките PL и NL. Следователно I е център на описаната окръжност на $\triangle PNL$, т.е. $ID = IL$.

От свойството на ъглополовящата AI в $\triangle ALC$ следва, че $CI : IL = AC : AL = 2 : 1$. Сега от $ID = IL$ и $CI : IL = 2 : 1$ следва, че $CD = DI = IL$, т.е. $CD : DL = 1 : 2$.

Оценяване. (6 точки) *Първи начин*: 1 т. за $MK = IT$, 2 т. за $\triangle AMK \cong \triangle CFI$ и извод $CI = AK = KI$, 1 т. за $IP = IL$, 1 т. за I – център на описаната около $\triangle PLN$ окръжност, 1 т. за довършване.

Втори начин: 2 т. за $c = \dfrac{a+b}{2}$, 2 т. за доказване, че I е център на описаната окръжност на $\triangle PNL$, 1 т. за $CI : IL = 2 : 1$, 1 т. за получаване на отговора.

Задача 9.3. За всяко естествено число n подреждаме естествените му делители по големина: $1 = d_1 < d_2 < d_3 < \cdots < d_k = n$. Нека

$$A = \sum_{i=1}^{k} d_i + \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{d_i}.$$

Възможно ли е:

а) $A = 2018$;

б) $A = 2019$?

Решение. Нека $s = \sum_{i=1}^{k} d_i$. Тъй като $n \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{d_i} = \sum_{i=1}^{k} d_i = s$, получаваме уравнението $An = s(n+1)$. Тъй като $(n, n+1) = 1$, заключаваме, че $n+1$ е делител на A.

а) Тъй като каноничното разлагане на 2018 е $2018 = 2.1009$, от горното следва, че $n+1 = 2$, 1009 или 2018, т.е. $n = 1$, 1008 или 2017. За s получаваме съответно $s = 2$, 3224 и 2018, като и трите не водят до решение, т.е. $A = 2018$ е невъзможно.

б) Тъй като каноничното разлагане на 2019 е $2019 = 3.673$, имаме $n+1 = 3$, 673 или 2019, т.е. $n = 2$, 672 или 2018. Лесно се проверява, че при $n = 672$ имаме $s = 2016$, което дава решение на уравнението $2019n = s(n+1)$ и значи отговорът е положителен.

Оценяване. (7 точки) 2 т. за доказване на $\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{d_i} = s/n$, 1 т. за получаване на уравнението $An = s(n+1)$, по 2 т. за всеки от случаите $A = 2018$ и $A = 2019$.

Задача 9.4. Дадено е естествено число $k \geq 2$. Естествените числа $a_1 < a_2 < \cdots < a_{2k}$ са такива, че числата

$$a_1 + a_{2k}, a_2 + a_{2k-1}, \ldots, a_{k-1} + a_{k+2}, a_k + a_{k+1}$$

са две по две различни. Да се намери най-малката възможна стойност на a_{2k}.

Решение. За всяко $i = 1, 2, \ldots, k-1$ да означим $a_{i+1} = a_i + x_i$ и $a_{2k+1-i} = a_{2k-i} + y_i$. Тогава

$$\begin{array}{llll} a_2 = a_1 + x_1 & a_3 = a_2 + x_2 & \ldots & a_k = a_{k-1} + x_{k-1} \\ a_{2k} = a_{2k-1} + y_1 & a_{2k-1} = a_{2k-2} + y_2 & \ldots & a_{k+2} = a_{k+1} + y_{k-1}. \end{array}$$

Тъй като числата $a_1, a_2, \ldots, a_{2k}$ са различни, то $x_i \geq 1$ и $y_i \geq 1$. Ако за някое i имаме $x_i = y_i$, ще получим $a_{i+1} - a_i = x_i = y_i = a_{2k+1-i} - a_{2k-i}$ и следователно $a_i + a_{2k+1-i} = a_{i+1} + a_{2k-i}$, противоречие. От $x_i \geq 1$, $y_i \geq 1$ и $x_i \neq y_i$ следва, че $x_i + y_i \geq 3$. Пресмятаме:

$$\begin{aligned} a_{2k} &= a_{2k} - a_{2k-1} + a_{2k-1} - a_{2k-2} + \cdots + a_3 - a_2 + a_2 - a_1 + a_1 = \\ &= y_1 + y_2 + \cdots + y_{k-1} + a_{k+1} - a_k + x_{k-1} + x_{k-2} + \cdots + x_1 + a_1 = \\ &= (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + \cdots + (x_{k-1} + y_{k-1}) + (a_{k+1} - a_k) + a_1 \geq 3(k-1) + 2 \end{aligned}$$

Следователно

$$a_{2k} \geq 3(k-1) + 2 = 3k - 1. \tag{1}$$

За числата

$$a_1 = 1, a_2 = 3, \ldots, a_k = 2k-1, a_{k+1} = 2k, a_{k+2} = 2k+1, \ldots a_{2k} = 3k-1$$

имаме, че сборовете $a_1 + a_{2k} = 3k$, $a_2 + a_{2k-1} = 3k+1, \ldots, a_{2k} + a_{2k+1} = 4k-1$ са различни. Следователно

$$\min\{a_{2k}\} \leq 3k - 1. \tag{2}$$

От (1) и (2) следва, че $\min\{a_{2k}\} = 3k - 1$.

Оценяване. (7 точки) 4 т. за оценката $a_{2k} \geq 3k-1$, 3 т. за пример, от който следва $a_{2k} \leq 3k-1$.

Задача 10.1. Даден е триъгълник ABC и ъглополовяща CL ($L \in AB$). Окръжност през C и L пресича правата AB и описаната около ABC окръжност k за втори път съответно в точки M и N, като A е между M и B, а N е върху дъгата $\overset{\frown}{AB}$, несъдържаща C. Аналогично, втора окръжност през C и L пресича правата AB и k за втори път съответно в точки P и Q, като B е между P и A, а Q е върху дъгата $\overset{\frown}{AB}$, несъдържаща C. Да се докаже, че точките M, N, P и Q лежат на една окръжност.

Решение. Нека CL е ъглополовяща на $\sphericalangle ACB$. Нека K е средата на дъгата $\overset{\frown}{AB}$, несъдържаща C. Тогава K лежи на правата CL и имаме $\sphericalangle MNC = \sphericalangle MLC$ и $\sphericalangle KNC = \sphericalangle BLC$, откъдето

$$\sphericalangle MNC + \sphericalangle KNC = \sphericalangle MLC + \sphericalangle BLC = 180^\circ,$$

т.е. точките M, N и K лежат на една права. Аналогично се вижда, че Q, P и K лежат на една права. Сега от $KN.KM = KL.KC = KP.KQ$ следва, че точките M, N, P и Q лежат на една окръжност.

Забележка. Вярно е и обратното твърдение – ако M, N, P и Q лежат на една окръжност, то CL е ъглополовяща. Нека M, N, P и Q лежат на една окръжност. Тогава правите MN, CL и PQ се пресичат в една точка, защото са общи хорди на окръжностите, описани около $MNLC$, $PQCL$ и $MNPQ$. Както по-горе получаваме

$$\sphericalangle MNC + \sphericalangle QPC = \sphericalangle MLC + \sphericalangle QLC = 180^\circ$$

и следователно $\sphericalangle KNC + \sphericalangle KPC = 180^\circ$, т.е. K лежи върху k. Сега от $\sphericalangle KPC = \sphericalangle MNC = \sphericalangle ALC$ следва, че $\overset{\frown}{AK} = \overset{\frown}{BK}$, т.е. CL е ъглополовяща на $\sphericalangle ACB$.

Оценяване: (6 точки) 1 т. за въвеждане на средата на дъгата $\overset{\frown}{AB}$, 3 т. за доказване на двете колинеарности, 2 т. за довършване.

Задача 10.2. Да се определи за кои стойности на реалния параметър a, уравнението

$$\sqrt{3+2x-x^2} - \sqrt{4-a^2+2ax-x^2} = 1-a$$

има единствено решение.

Решение. Дефиниционната област на уравнението е $[-1,3] \cap [a-2, a+2]$ и тя е непразно множество за $a \in [-3,5]$. Ясно е, че за $a = 1$, всяко x е решение. Ще разглеждаме даденото уравнение за $a \in [-3,5]$ и $a \neq 2$. Пренаписвайки го като

$$\sqrt{3+2x-x^2} + (a-1) = \sqrt{4-a^2+2ax-x^2} \tag{1}$$

и повдигайки на квадрат, получаваме

$$\sqrt{3+2x-x^2} = x-a \tag{2}$$

и замествайки в (1), получаваме

$$\sqrt{4-a^2+2ax-x^2} = x-1. \tag{3}$$

След повдигане на квадрат на (2) (или на (3)) имаме, че

$$f(x) = 2x^2 - 2(a+1)x + a^2 - 3 = 0. \tag{4}$$

Преобразуванията на (1) до (4) са еквивалентни за x от дефиниционата област $[-1,3] \cap [a-2, a+2]$, $a \neq 1$ и за $x \geq a$, $x \geq 1$.

Така даденото уравнение има единствено решение тогава и само тогава, когато уравнението (4) има единствено решение, ако $a \in [-3,5]$, $a \neq 1$, $x \in [-1,3] \cap [a-2, a+2]$, $x \geq a$ и $x \geq 1$.

Уравнението (4) има решение, ако $D_f = -a^2 + 2a + 7 \geq 0$, т. е. за $a \in [1-2\sqrt{2}, 1+2\sqrt{2}] \subset [-3,5]$ и то ще е единствено за $x \geq a$ и $x \geq 1$, само ако a и 1 са между корените му, т. е. за

$$f(a) = f(1) = a^2 - 2a - 3 \leq 0 \text{ или } a \in [-1,3] \subset [1-2\sqrt{2}, 1+2\sqrt{2}] \subset [-3,5].$$

Остава да видим за кои $a \in [-1,3]$, $a \neq 1$ решението на уравнението (4), за което $x \geq a$ и $x \geq 1$, принадлежи на дефиниционната област. Тъй като

$$f(-1) = f(a+2) = (a+1)^2 \geq 0 \text{ и } f(3) = f(a-2) = (a-3)^2 \geq 0,$$

то трябва и двата корена на уравнението (4) да се съдържат в интервалите от дефиниционната област, което е еквивалентно на неравенствата

$$-1 \leq \frac{a+1}{2} \leq 3 \text{ и } a-2 \leq \frac{a+1}{2} \leq a+2,$$

които са изпълнени за всяко $a \in [-1,3]$.

Окончателно, даденото уравнение има единствено решение за $a \in [-1, 1) \cup (1, 3]$.

Оценяване: (6 точки) 1 т. за получаване на уравнение с един радикал, 1 т. за получаване на квадратното уравнение (4), 2 т. за описание на условията за единствен корен, 2 т. за изследването им.

Задача 10.3. Да се намерят всички естествени числа n, които са точна степен (възможно първа) на просто число и такива, че $\sigma(n)$ дели числото $n\varphi(n) - 6$. Със $\sigma(n)$ се означава сумата от естествените делители на n, а с $\varphi(n)$ – броят на естествените числа, по-малки от n и взаимнопрости с n.

Решение. Нека $n = p^k$, където p е просто, а k е естествено число. Тъй като $\varphi(n) = p^{k-1}(p-1)$ и $\sigma(n) = (p^{k+1} - 1)/(p - 1)$, условието се записва във вида

$$p^{2k-1}(p-1) \equiv 6 \pmod{\frac{p^{k+1}-1}{p-1}}. \tag{1}$$

Тъй като $p^{k+1} \equiv 1 \pmod{\frac{p^{k+1}-1}{p-1}}$, от (1) следва, че $p - 1 \equiv 6p^3 \pmod{\frac{p^{k+1}-1}{p-1}}$.

Ако $k \geq 4$, то $p^5 - 1 \leq p^{k+1} - 1 \leq (p-1)(6p^3 - p + 1)$, откъдето $p^4 + p^3 + p^2 + p + 1 \leq 6p^3 - p + 1 \iff p^3(p-5) + 2p < 0$, което е възможно само при $p = 2$ и $p = 3$. В тези два случая получаваме съответно $6p^3 - p + 1 = 47$ и 160, за които лесно се вижда, че не се делят на числа от вида $p^{k+1} - 1$ за $p = 2$ и 3 и $k \geq 4$.

При $k = 3$ имаме $p^3 + p^2 + p + 1 | 6p^3 - p + 1 = 6(p^3 + p^2 + p + 1) - 6p^2 - 7p - 5$, откъдето $p^3 + p^2 + p + 1 | 6p^2 + 7p + 5$, т.е. $p^3 + p^2 + p + 1 \leq 6p^2 + 7p + 5$. Последното е еквивалентно на $p(p^2 - 5p - 6) \leq 4$, което е възможно само ако $p \leq 5$. Директна проверка на $p = 2$, 3 и 5 води до решението $p = 3$ ($n = 3^3 = 27$).

При $k = 2$ имаме $p^2 + p + 1 | 6p^3 - p + 1 = 6p(p^2 + p + 1) - 6(p^2 + p + 1) - p + 7$, откъдето $p^3 + p^2 + p + 1 | p - 7$, т.е. $p^3 + p^2 + p + 1 \leq p - 7$ (което очевидно е невъзможно) или $p = 7$. Последното дава решение $n = 7^2 = 49$.

При $k = 1$ имаме $p + 1 | 6p^3 - p + 1 = (6p^2 - 6p + 5)(p + 1) - 4$, откъдето $p + 1 | 4$, т.е. $p = 3 = n$.

Оценяване: (7 точки) 2 т. за редуциране на сравнението до трета степен; 2 т. за случая $k \geq 4$, по 1 т. за случаите $k = 3$, 2 и 1 (последните два могат да се разглеждат директно от (1)).

Задача 10.4. Нека n е естествено число. Пермутация $(a_1, a_2, \ldots, a_{2018})$ на числата $(1, 2, \ldots, 2018)$ се нарича *добра*, ако $|a_i - i| \leq n$ за всяко $i = 1, 2, \ldots, 2018$. Да се намерят всички стойности на n, за които броят на добрите пермутации е нечетен.

Решение. Отговор: $n = 504$ или $n = 1008$. Ще разгледаме общия случай (т.е. с N вместо 2018). Ще докажем, че броят на добрите пермутации е нечетен точно когато $2n + 1$ дели N или $N - 1$.

Да отбележим първо, че ако една пермутация е добра, то и обратната и е такава. Следователно остава да се интересуваме от четността на добрите пермутации, които съвпадат с обратните си (ще ги наричаме инволюции).

Общият брой на инволюциите е нечетен само при $N = 0$ и $N = 1$ (защото е равен на $N!$ минус броя на пермутациите, които не са инволюции). Ако $2 \leq N \leq n + 1$ всяка пермутация е добра и броят им е четно число.

Нека $N > n+1$ и да разгледаме добрите инволюции в зависимост от действието (ограничението им) върху множествата $\{n+2, \ldots, N\}$. За всеки клас T с фиксирано действие върху $\{n+2, \ldots, N\}$ действието върху $\{1, 2, \ldots, n+1\}$ също е фиксирано. Ако $f(T)$ е ограничението на тези инволюции върху $\{1, 2, \ldots, n+1\}$, то $|T|$ е равно на броя на инволюциите в $f(T)$. Следователно $|T|$ може да е нечетно само ако последният брой е нечетен, т.е. равен на 1. Следователно в нашата цяла добра инволюция имаме $1 \to 1$, $i \to n+i$ за $2 \leq i \leq n+1$.

Горното свежда задачата от N към $N-(2n+1)$. За да финишираме в нечетен брой, трябва накрая $N - k(2n+1)$ да е равно на 0 или 1 (k е броят на редукциите), т.е. $2n+1$ дели N или $N-1$. При $N = 2018$ получаваме $2n+1|2018$, т.е. $n = 504$ или $2n+1|2017$, т.е. $n = 1008$.

Оценяване: (7 точки) 1 т. за разглеждане на всяка пермутация заедно с обратната ѝ, 1 т. за съображението, че броят на инволюциите е нечетен само при $N = 0$ и 1, 4 т. за свеждане на задачата от N към $N-(2n+1)$, 1 т. за довършване.

Задача 11.1. Да се реши уравнението

$$\operatorname{cotg} 4x + \cos 2x + \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}{\sin 4x} = 0.$$

Решение. Полагаме $y = \frac{\pi}{4} - x$ и получаваме уравнението

$$-\operatorname{cotg} 4y + \sin 2y + \frac{\cos^2 y}{\sin 4y} = 0,$$

като $y \neq k\pi/4$, $k \in \mathbb{Z}$. Преобразуваме това уравнение до

$$4\cos^3 2y + 4\cos^2 2y - 5\cos 2y - 3 = 0,$$

където полагаме $\cos 2y = u$ и получаваме $4u^3 + 4u^2 - 5u - 3 = 0$. Последното уравнение има корени $-3/2$, $-1/2$ и 1. Първият и третият не дават решение на задачата, а от втория получаваме $2y = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Замествайки обратно y с $\frac{\pi}{4} - x$, получаваме окончателно $x = -\frac{\pi}{12} + k\pi$, $x = \frac{7\pi}{12} + m\pi$, $k, m \in \mathbb{Z}$.

Оценяване: (6 точки) 3 т. за получаване на уравнение относно $\cos 2y$, 1 т. за решаването му, 2 т. за довършване.

Задача 11.2. Нека AM е медиана в неравностранния триъгълник ABC, точката O е център на описаната около него окръжност и точката G е медицентър на триъгълника AMC. Да се докаже, че $OG \perp AM$ тогава и само тогава, когато $CA = CB$.

Решение. *Първи начин.* Нека N и K са средите на страните AC и AB, съответно, а точката T е пресечната точка на KO и AM. Ясно е, че $G \in NM$ и $NG : GM = 1 : 2$ и точката O е ортоцентър на триъгълника MNK. Нека пресечната точка на AM и KN е S. Точката S е среда на отсечката KN, т. е. MS е медиана за триъгълника MNK ($AKMN$ е успоредник).

Имаме, че $OG \perp AM$ тогава и само тогава, когато точката T е ортоцентър на триъгълника GOM. Последното е еквивалентно на $GT \perp OM$ или на $GT \parallel NK$. Това е вярно тогава и само тогава, когато $MT : TS = 2 : 1$ или когато точката T е медицентър на триъгълника MNK. Така $OG \perp AM$ е изпълнено, само ако медицентърът T на триъгълника MNK лежи на височината му KO или когато $KN = KM$, което е еквивалентно на $CA = CB$.

Втори начин. Нека в правоъгълна координатна система с единични вектори $\overrightarrow{e_1}$ и $\overrightarrow{e_2}$ върховете на триъгълника са $A(0,0)$, $B(a,0)$ и $C(b,c)$. Тогава $\overrightarrow{AG}= \frac{a+3b}{6}\ \overrightarrow{e_1} + \frac{c}{2}\ \overrightarrow{e_2}$ и $\overrightarrow{AO}= \frac{a}{2}\ \overrightarrow{e_1} + \frac{b^2+c^2-ab}{2c}\ \overrightarrow{e_2}$, откъдето $\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AO}= \frac{3b-2a}{6}\ \overrightarrow{e_1} + \frac{ab-b^2}{2c}\ \overrightarrow{e_2}$. Освен това $\overrightarrow{AM}= \frac{a+b}{2}\ \overrightarrow{e_1} + \frac{c}{2}\ \overrightarrow{e_2}$. Следователно

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{OG}= \frac{(3b-2a)(a+b)+3(ab-b^2)}{12} = \frac{2ab-b^2}{6},$$

откъдето $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{OG}= 0 \iff a = 2b \iff AC = BC$.

Оценяване: (6 точки) 1 точка за $NG : GM$, 2 точки за T е ортоцентър на GOM, 2 точки за медицентър на MNK, 2 точки това, че T лежи KO и 1 точка за $CA = CB$.

Задача 11.3. Нека n е естествено число и X е низ от нули и единици с дължина n.

а) Да се докаже, че броят на низовете от нули и единици, с дължина $n+3$, съдържащи X като подниз, не зависи от X.

б) Да се намери най-малкото n, за което броят от а) е по-голям от 2018.

(Казваме, че X е подниз на Y, ако X може да се получи от Y чрез изтриване на символи на Y.)

Решение. а) Нека $t \geq 0$ е цяло число. Да означим с $A_t(X)$ множеството от низовете, получени от низа $X = x_1x_2\dots x_n$ с вмъкване на t символа. Ще докажем индукция по n и t, че мощността на $A_t(X)$ не зависи от X. Очевидно имаме $|A_0(X)| = 1$ и $|A_t(X)| = 2^t$, когато $n = 0$ (т.е. X е празният низ). Сега, ако допуснем, че твърдението е вярно за всички низове X с дължина до $n-1$ и всички t, както и за всички низове с дължина n и всички числа до $t-1$, желаното следва от факта, че $A_t(X)$ е обединение на множествата $x_1A_t(x_2\dots x_n)$ и $\overline{x}_1A_{t-1}(x_1x_2\dots x_n)$, където $\overline{x}_1 = 1(0)$, ако $x_1 = 0(1)$. Действително, тъй като двете множества са непресичащи се, имаме

$$|A_t(X)| = |A_t(x_2\dots x_n)| + |A_{t-1}(x_1x_2\dots x_n)|$$

и събираемите отдясно не зависят от X по индукционно предположение.

б) Тъй като броят на низовете Y с i единици и $n+t-i$ нули, $0 \leq i \leq t$, е $\binom{n+t}{i}$, имаме

$$|A_t(0\dots 0)| = \sum_{i=0}^{t} \binom{n+t}{i}$$

(нулите са n на брой). В нашата задача $t = 3$ и следователно търсим най-малкото n, за което

$$\binom{n+3}{0} + \binom{n+3}{1} + \binom{n+3}{2} + \binom{n+3}{3} > 2018.$$

Лявата страна е строго растяща и директно се вижда, че $n = 20$.

Оценяване: (7 точки) 2 т. за намиране на рекурентната връзка, 2 т. за завършване на а), 2 т. за намиране на формула за броя на низовете Y с дължина $n+3$, 1 т. за намиране на $n = 20$.

Задача 11.4. Първоначално естествените числа са написани в редицата $1, 2, 3, \dots$. Последователно изтриваме от редицата първите 4 числа и тяхната сума. Числата, които получаваме като суми, записваме в нова редица: $10, 26, 45, 62, \ldots$. Да се докаже, че в новата редица има безбройно много числа, които се делят на 2018.

Решение. Да означим новата редица с $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$. Ще докажем по индукция, че от множеството $\{1, 2, \ldots, 17k\}$, $k = 1, 2 \ldots$, сме задраскали като суми $S_n = 17(n-1)+d_n$, $n = 1, 2, \ldots k$, където $d_n \in \{9, 10, 11, 12\}$ и

$$d_n = \begin{cases} 10, & \text{ако } n \equiv 1 \pmod 4 \\ 9, & \text{ако } n \equiv 2 \pmod 4 \\ 21 - d_{\frac{n+1}{4}}, & \text{ако } n \equiv 3 \pmod 4 \\ 11, & \text{ако } n \equiv 4 \pmod 4 \end{cases}$$

Твърдението е вярно за $k = 1$. Нека е вярно за k. Ще го докажем за $k+1$. От индукционното предположение имаме, че за $n = 1, 2, \ldots k$ от числата $17(n-1)+1$, $17(n-1)+2$, $\ldots$, $17(n-1)+17$ сме задраскали S_n като сума, а останалите по четворки, на които сме търсили сумата. Освен това, първите, вторите и последните 4 числа ни дават сумите $4.17(n-1)+10 = 17[(4n-3)-1]+10$, $4.17(n-1)+26 = 17[(4n-2)-1]+9$ и $4.17(n-1)+62 = 17[(4n)-1]+11$. От числата $17(n-1)+9$, $17(n-1)+10$, $17(n-1)+11$, $17(n-1)+12$ и $17(n-1)+13$ едното е S_n, а сумата на останалите е $5.17(n-1)+55-S_n = 17[(4n-1)-1]+(21-d_n)$. Следователно от $17(n-1)+1$, $17(n-1)+2$, $\ldots$, $17(n-1)+17$ получаваме като суми само числа от вида $17[(4n-a)-1]+b$, където $a = 3$, 2, 1 или 0, а $b = 10$, 9, $21-d_n$ или 11, съответно.

Нека $k+1 = 4q+r = 4(q+1)-(4-r)$, $r = 1$, 2, 3, 4. Тогава $S_{k+1} = 17[(4n-a)-1]+b$, където $n = q+1$, $a = 4-r$, а b се определя от a. За $r = 3$, $a = 1$ и $b = 21-d_{q+1} = 21-d_{\frac{k+2}{4}}$. С това твърдението е доказано.

От $17.831 \equiv 1 \pmod{2018}$ следва, че $2018 \mid S_n = 17(n-1)+d_n$ се случва при $n \equiv 1-831d_n$ $\pmod{2018}$, т.е. при $n \equiv 594, 1781, 943, 119 \pmod{2018}$.

Оценяване: (7 точки) 5 точки за формулата за d_n и 2 точки за довършване на задачата

Задача 12.1. Съществуват ли реални числа x и y, за които

$$2\sin x + 2\sin y = 12\sin(x+y) + 15\,?$$

Решение. Ако $s = \dfrac{x+y}{2}$ и $f(s) = |\sin s| - 3\sin 2s$, то

$$(1)\ A(x,y) := 2\sin x + 2\sin y - 12\sin z = 4\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} - 12\sin(x+y) \le 4f(s).$$

При $t \in (0, \pi)$ имаме, че

$$(2)\quad f'(t) = \cos t - 6\cos 2t = \cos t - 6(2\cos^2 t - 1) = -12(\cos t - 3/4)(\cos t + 2/3).$$

Съществува единствено $t_0 \in (0, \pi)$, за което $\cos t_0 = -2/3$. Тогава $\sin t_0 = \sqrt{5}/3 =: c$. Понеже $f(z) = f(z+\pi)$, лесно намираме, че (3) $\max f = f(t_0) = 5c$. Оттук (4) $A \le 20c < 15$ (последното следва след повдигане на квадрат) и значи отговорът е *не*.

Оценяване: (6 точки) 2 т. за (1), 1 т. за (2), 2 т. за (3) и 1 т. за (4).

Задача 12.2. Нека $ABCD$ е изпъкнал четириъгълник, за който

$$\frac{AC^2}{S_{ACD}} = \frac{AB^2}{S_{ABD}} + \frac{BC^2}{S_{BCD}}.$$

Да се докаже, че той е вписан в окръжност.

Решение. Да означим с D' пресечната точка на лъча BD и описаната окръжност $k(O,R)$ около $\triangle ABC$. Нека h_a, h_b, h_c (h'_a, h'_b, h'_c) са дължините на перпендикулярите от D (D') към съответните страни на $\triangle ABC$. Полагаме

$$f(D) = \frac{b}{h_b} - \frac{c}{h_c} - \frac{a}{h_a}.$$

Имаме, че

$$(1)\ \frac{h'_b}{h_b} = \frac{D'E}{DE} =: m, \quad (2)\ \frac{h'_c}{h_c} = \frac{D'B}{DB} = \frac{h'_a}{h_a} =: n,$$

където $E = AC \cap BD$. Очевидно $m > n$ ($m < n$) ако D лежи във вътрешността k_i (външността k_e) на k. Следователно (3) $f(D) > mf(D')$, ако $D \in k_i$, и (4) $f(D) < mf(D')$, ако $D \in k_e$. От друга страна, ако $a' = AD$, $b' = BD$, $c' = CD$, то

$$(5) \quad f(D') = 4R\left(\frac{b}{a'c'} - \frac{c}{a'b'} - \frac{a}{b'c'}\right) = 4R\frac{bb' - cc' - aa'}{a'b'c'} = 0$$

съгласно теоремата на Птолемей. Значи $f(D) = 0$ само когато $D \in k$.

Оценяване: (6 точки) По 1 т. за (1), (2), (3), (4) и 2 т. за (5).

Задача 12.3. Дадени са реални числа $a_1 \le a_2 \le a_3$. Да се докаже, че неравенството

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \ge 2(a_1x_2x_3 + a_2x_3x_1 + a_3x_1x_2)$$

е изпълнено за произволни реални числа x_1, x_2, x_3 тогава и само тогава, когато съществуват числа $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \in [0, \pi]$ такива, че $|\pi - \theta_1 - \theta_2| \le \theta_3$ и $a_1 = \cos\theta_1$, $a_2 = \cos\theta_2$, $a_3 = \cos\theta_3$.

Решение. Разглеждайки даденото неравенство като квадратно спрямо x_3, условието е еквивалентно на

$$D_1 = (a_1x_2 + a_2x_1)^2 + 2a_3x_1x_2 - x_1^2 - x_2^2 \le 0 \Leftrightarrow$$
$$(1 - a_1^2)x_2^2 + (1 - a_2^2)x_1^2 - 2(a_1a_2 + a_3)x_1x_2 \ge 0 \Leftrightarrow$$
$$|a_1| \le 1 \ \&\ (a_1a_2 + a_3)^3 - (1 - a_1^2)(1 - a_2^2) \le 0 \Leftrightarrow$$
$$|a_1| \le 1 \ \&\ (1)\ a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + 2a_1a_2a_3 \le 1.$$

По симетрия $|a_2| \le 1$, $|a_3| \le 1$ и значи можем да положим $a_1 = \cos\theta_1$, $a_2 = \cos\theta_2$, $a_3 = \cos\theta_3$, където $0 \le \theta_3 \le \theta_2 \le \theta_1 \le \pi$. Тогава

$$(1) \Leftrightarrow -a_1a_2 - \sqrt{(1 - a_1^2)(1 - a_2^2)} \le a_3 \le -a_1a_2 + \sqrt{(1 - a_1^2)(1 - a_2^2)} \Leftrightarrow$$

$$(2)\ \cos(\pi - \theta_1 + \theta_2) \le \cos\theta_3 \le \cos(\pi - \theta_1 - \theta_2).$$

Понеже $\pi - \theta_1 + \theta_2, |\pi - \theta_1 - \theta_2| \in [0, \pi]$, то

$$(2) \Leftrightarrow |\pi - \theta_1 - \theta_2| \leq \theta_3 \leq \pi - \theta_1 + \theta_2.$$

Последното неравенство е автоматично изпълнено и следователно

$$(2) \Leftrightarrow |\pi - \theta_1 - \theta_2| \leq \theta_3.$$

Оценяване: 1 т. за $|a_i| \leq 1$, 2 т. за (1), 2 т. за (2) и 2 т. за довършване на решението. 4 т., ако е доказана само една от посоките на твърдението.

Задача 12.4. Вж. Задача 11.4.

Задачите са предложени от: 8.1, 8.2, 8.3 – Иван Тонов, 8.4 – Ивайло Кортезов, 9.1, 9.4 – Емил Колев, 9.2 – Диана Данова, 9.3 – Васил Василев и Петър Бойваленков, 10.1, 10.4 – Александър Иванов, 10.2, 11.2, 11.4(12.4) – Асен Божилов, 10.3 – Петър Бойваленков, 11.1, 11.3 – Иван Ланджев, 12.1, 12.2, 12.3 – Николай Николов.