Условия, кратки решения и критерии за оценяване

Задача 8.1. а) Да се докаже, че произведение на четири последователни естествени числа не може да е точен квадрат на естествено число.
б) Да се намерят всички естествени числа n, за които числото $n^2 + 9n + 8$ може да се представи като произведение на четири последователни естествени числа.

Решение. а) Имаме

$$x(x+1)(x+2)(x+3) = (x^2+3x)(x^2+3x+2) = (x^2+3x+1-1)(x^2+3x+1+1) = (x^2+3x+1)^2-1,$$

което показва, че произведението на четири последователни естествени числа не е точен квадрат на естествено число.
б) От а) следва, че числото $n^2 + 9n + 9$ е точен квадрат. От друга страна,

$$(n+3)^2 < n^2 + 9n + 9 < (n+5)^2 \quad \Longrightarrow \quad n^2 + 9n + 9 = (n+4)^2 \quad \Longrightarrow \quad n = 7.$$

Действително, $7^2 + 9 \cdot 7 + 8 = 120 = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$.

Оценяване. (6 точки) 1 т. за а) и 5 т. за б).

Задача 8.2. Точките M, N и K са съответно върху страните AC, BC и AB на $\triangle ABC$, като K е среда на AB, а $MN \perp CK$. Ако $\measuredangle NMC = \measuredangle BKN$ и $\measuredangle MNC = \measuredangle AKM$, докажете, че отсечките AN, BM и CK се пресичат в една точка.

Решение. От условието следва, че $\measuredangle MKN = \measuredangle ACB = \gamma$, като допълващи едни и същи ъгли до $180°$. Нека означим пресечната точка на MN и CK с L. Построяваме $DL = CL$, така че D да е от лъча LK. Ако допуснем, че D е между L и K, то от еднаквостта на триъгълниците $\triangle MLC \cong \triangle MLD$, $\triangle LNC \cong \triangle LND$ следва, че $\measuredangle MDN = \measuredangle MCN = \gamma$. От друга страна, $\measuredangle MDL > \measuredangle MKL$, $\measuredangle NDL > \measuredangle NKL$, като външни съответно за $\triangle MKD$ и $\triangle NKD$. Следователно,

$$\gamma = \measuredangle MDN = \measuredangle MDL + \measuredangle NDL > \measuredangle MKL + \measuredangle NKL = \measuredangle MKN = \gamma,$$

което е невъзможно и значи D не е между L и K. Аналогично (с неравенства в обратната посока) се доказва, че K не може да е между L и D. Следователно $D \equiv K$ и $CL = LK$.
Да построим през L отсечка $M_1N_1 \parallel AB$ ($M_1 \in AC, N_1 \in BC$). Ясно е, че M_1 и N_1 са средите на AC и BC. Ако допуснем, че $MN \nparallel AB$, то, без ограничение на общността, нека $M_1 \in AM$, $N \in CN_1$. Тогава,

$$\measuredangle BAC = \measuredangle N_1M_1C > \measuredangle NMC = \measuredangle BKN > \measuredangle BKN_1 = \measuredangle BAC,$$

което е противоречие. Следователно, $MN \parallel AB$, $M \equiv M_1$ и $N \equiv N_1$, т.е., отсечките AN, BM и CK се явяват медиани в $\triangle ABC$ и като такива се пресичат в медицентъра на триъгълника.

Оценяване. (6 точки) 2 т. за доказване, че L е среда на CD; 3 т. за доказване, че M и N са среди на AC и BC; 1 т. за довършване.

Задача 8.3. Да се докаже, че съществуват безброй много естествени числа a, такива че за всяко естествено число n числата $n^3+2018n+a$, $n^3+2019n+a$ и $n^3+2020n+a$ са съставни.

Решение. Понеже $n(n^2-1)$ е произведение на три последователни числа, то то се дели на 3 за всяко n. Следователно, при a делящо се на 3, числото $n^3+2018n+a = n(n^2-1)+2019n+a$ ще се дели на 3. Понеже $n(n^2+1)$ е четно за всяко n, то при a делящо се на 2, числото $n^3+2019n+a = n(n^2+1)+2018n+a$ ще е четно. Да положим $a := k^3+2020k$. Тогава, $n^3+2020n+k^3+2020k = (n+k)(n^2-nk+k^2+2020)$, т.е., числото е съставно. Остава да осигурим числото $a = k^3+2020k$ да се дели и на 2 и на 3, т.е., $k = 6t$. За всяко естетсвено число t, число a от вида $(6t)^3+2020\cdot 6t = 24t(9t^2+505)$ гарантира, че всяко от числата $n^3+2018n+a$, $n^3+2019n+a$ и $n^3+2020n+a$ е съставно.

Оценяване. (7 точки) 1 т., че $3|a \Rightarrow n^3+2018n+a$ - съставно; 1 т., че $2|a \Rightarrow n^3+2019n+a$ - съставно; 4 т., че при $a = k^3+2020k$, $n^3+2020n+a$ - съставно; 1 т. за довършване.

Задача 8.4. В долното ляво поле на дъска 7×9 е поставен пул. На всеки ход пулът се премества или две полета надясно, или две полета нагоре, или три полета наляво, или три полета надолу, или едно поле по диагонал нагоре-надясно, като не е разрешено да се поставя в полета, в които е бил по-рано. Колко най-много полета може да посети пулът?

Решение. **Отговор:** 60. Да номерираме полетата, както е показано на таблицата вляво.

4	2	5	3	1	4	2	5	3
1	4	2	5	3	1	4	2	5
3	1	4	2	5	3	1	4	2
5	3	1	4	2	5	3	1	4
2	5	3	1	4	2	5	3	1
4	2	5	3	1	4	2	5	3
1	4	2	5	3	1	4	2	5

59	47	60	58	46	44		45	43
6	49	7	55	18	31	19	42	30
3	51	9	57	15	33	21	39	27
5	48	11	54	17	35	23	41	29
2	50	8	56	14	32	20	38	26
4	52	10	53	16	34	22	40	28
1		12		13	36	24	37	25

Тогава пулът задължително посещава полетата в реда $1, 2, 3, 4, 5, 1$ и т.н. Има 12 полета с номер 1 и началното е с номер 1, така че пулът може да посети най-много $5\cdot 12 = 60$ полета. Това може да стане например като на таблицата вдясно.

Оценяване. (7 точки) 3 т. за оценката и 4 т. за конструкция на пример.

Задача 9.1. Да се намерят всички стойности на реалния параметър a, за които уравнението

$$|x|(x+1) = ax + a^2$$

има точно два различни реални корена.

Решение. При $a = 0$ уравнението има корени 0 и -1, т.е. $a = 0$ е решение. Нека $a \neq 0$. При $x \geq 0$ получаваме уравнението $x^2+(1-a)x-a^2 = 0$, което има два реални корена с различни знаци и значи точно един от тях е корен на изходното уравнение. За да имаме точно два реални корена, трябва уравнението $x^2+(a+1)x+a^2 = 0$, което се получава при $x < 0$ да има точно един отрицателен корен. Тъй като корените на това уравнение са с еднакъв знак, единствената възможност е да имаме двоен отрицателен корен. Тогава $(a+1)^2 - 4a^2 = 0$, откъдето $a = 1$ или $a = -1/3$, като и в двата случая двойният корен е отрицателен.

Оценяване. (6 точки) 1 т. за случая $a = 0$, 2 т. за анализ на случая $x \geq 0$, 3 т. за анализ на $x < 0$.

Задача 9.2. Вписаната в остроъгълен триъгълник ABC окръжност се допира до страните AB и AC съответно в точките P и Q. Медианата CM пресича отсечката PQ в точка F. Да се докаже, че $AB = 2BC$ тогава и само тогава, когато BF е ъглополовяща на $\measuredangle ABC$.

Решение. Нека $AB = 2BC$ и вписаната в $\triangle ABC$ окръжност е с център I и се допира до страната BC в точка K. Тогава триъгълниците CMB и KPB са равнобедрени и основите им CM и KP са успоредни.
Точките C, Q и K лежат на окръжността с диаметър CI и, тъй като

$$\begin{aligned}\measuredangle QFC &= \measuredangle QPK = 180^\circ - (\measuredangle APQ + \measuredangle BPK)\\ &= 180^\circ - (90^\circ - \frac{1}{2}\measuredangle BAC) - (90^\circ - \frac{1}{2}\measuredangle ABC) = 90^\circ - \frac{1}{2}\measuredangle ACB,\end{aligned}$$

и $\measuredangle QKC = 90^\circ - \frac{1}{2}\measuredangle ACB$ следва, че точка F лежи на същата окръжност. Тогава $IF \perp CM$ и от $BI \perp CM$ следва, че B, I и F лежат на една права, т.е. BF е ъглополовяща на $\measuredangle ABC$.
Нека BF е ъглополовяща на $\measuredangle ABC$ (т.е. точките B, I и F лежат на една права). Имаме $\measuredangle KQP = \measuredangle KPB = 90^\circ - \frac{1}{2}\measuredangle ABC = \measuredangle BIK$, което означава, че четириъгълникът $FIKQ$ е вписан в окръжността с диаметър CI. Тогава $\measuredangle IFC = 90^\circ$ и BF е перпендикулярна едновременно на KP и CM, т.е. $KP \| CM$. Следователно $CM = CB$ и $AB = 2BC$.

Оценяване. (6 точки) по 3 т. за всяка от двете посоки.

Задача 9.3. Да се намери най-малкото естествено число k, за което уравнението $x^3 + y^3 = k2019^{2018-k}$ има решение в цели числа.

Решение. **Отговор:** 2. При $k = 1$ уравнението $x^3 + y^3 = 2019^{2017}$ няма решение. Действително, възможните остатъци на кубовете по модул 7 са 0, 1 и 6, което означава, че лявата страна е сравнима с 0, 1, 2, 5 или 6 по модул 7. От друга страна, $2019^{2017} \equiv 3^{2017} = 3^{6.336+1} \equiv 3 \pmod 7$.
При $k = 2$ уравнението придобива вида $x^3 + y^3 = 2 \cdot 2019^{2016}$ и има решение $x = y = 2019^{672}$.

Оценяване. (7 точки) 5 т. за случая $k = 1$ (1 т. за разглеждане на подходящ модул и по 2 т. за всяка от страните), 2 т. за случая $k = 2$.

Задача 9.4. Том играе компютърна игра, в която трябва да опази парче сирене от група от m мишки ($m \geq 3$ е естествено число). Сиренето е с формата на кръг с радиус 1 и център O, а мишките са точки в равнината на кръга. Първоначално мишките се намират в точки $A_1, A_2, \ldots, A_m$, които се намират в ъгъл $\measuredangle A_1OA_m = 90^\circ$. Всяко от разстоянията OA_i е точна степен на 2 като никое от лицата на триъгълниците OA_iA_{i+1}, $i = 1, 2, \ldots, m-1$, не надминава $\frac{1}{2}$.
На всеки ход мишките се разделят на две групи, като е възможно едната група да е празна. Том избира една от групите и я отстранява от играта, а всяка от мишките от другата група

изминава половината от разстоянието от текущото си положение до точка O. Да се докаже, че мишките могат да се договарят да се разделят така, че поне една от тях да достигне до сиренето преди да бъде отстранена, независимо от действията на Том.

Решение. Твърдението е очевидно, ако $|OA_i| = 1$ за някое i. Оттук нататък предполагаме, че $|OA_i| > 1$ и следователно $|OA_i| \geq 2$ за всяка точка $i \leq m$.
Да разгледаме мишка, която първоначално се намира в точка A_i на разстояние $2^{p_i} = |OA_i|$ от центъра на сиренето. Тогава, ако не е отстранена след t хода, тя ще се намира на разстояние $2^{p_i - t}$ до O. Това показва, че във всеки момент от време всяка (неотстранена) мишка се намира на разстояние 2^n от O за някое цяло n. Без ограничение на общността можем да считаме, че $n > 0$, защото иначе някоя от неотстранените мишки е достигнала сиренето.
Нека след t хода да имаме k неотстранени мишки, съответно на разстояния $2^{p_1(t)}, 2^{p_2(t)}, \ldots, 2^{p_k(t)}$ до O. Да разгледаме сумата

$$S(t) = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2^{p_i(t)}}.$$

Първо ще докажем, че $S(0) \geq 1$. Наистина, нека B_i за $i = 1, 2, \ldots, m$ е пресечната точка на отсечката OA_i със окръжността с център O и радиус 1 . Тогава лицето на триъгълника OB_iB_{i+1} е:

$$S_{OB_iB_{i+1}} = \frac{1}{|OA_i||OA_{i+1}|} S_{OA_iA_{i+1}} \leq \frac{1}{2|OA_i||OA_{i+1}|} \leq \frac{1}{4}\frac{1}{|OA_i|},$$

където първо използвахме, че $\frac{|OB_i|}{|OA_i|} = \frac{1}{|OA_i|}$, защото OB_i е радиус, след това, че $S_{OA_iA_{i+1}} \leq \frac{1}{2}$ и накрая, че $|OA_{i+1}| \geq 2$. Остана да забележим, че триъгълниците OB_iB_{i+1} покриват триъгълника OB_1B_m, който има лице $\frac{1}{2}$. Следователно лявата страна е поне $\frac{1}{2}$ и това показва, че $S(0) \geq 2$.
Сега ще покажем, че ако $S(t) \geq 1$, то мишките могат да се разделят на две групи A и B, че:

$$\sum_{i \in A} \frac{1}{2^{p_i(t)}} \geq \frac{1}{2} \text{ и } \sum_{i \in B} \frac{1}{2^{p_i(t)}} \geq \frac{1}{2}.$$

Тогава, която и група да бъде отстранена от Том, другата ще скъси разстоянието си до O на половина и ще гарантира, че $S(t+1) \geq 1$.
Без ограничение на общността нека $p_1(t) \geq p_2(t) \cdots \geq p_k(t) \geq 1$. Нека l е най-малкото естествено число, за което:

$$\sum_{i=1}^{l} \frac{1}{2^{p_i(t)}} \geq \frac{1}{2} \left(> \sum_{i=1}^{l-1} \frac{1}{2^{p_i(t)}} \right).$$

Тогава от $S(t) \geq 1$ следва, че:

$$\sum_{i=l+1}^{k} \frac{1}{2^{p_i(t)}} + \frac{1}{2^{p_l(t)}} > \frac{1}{2},$$

от което като приведем под общ знаменател получаваме, че:

$$\sum_{i=l+1}^{k} 2^{p_l(t)-p_i(t)} + 1 > 2^{p_l(t)-1}$$

Тъй като $p_l(t) \geq p_i(t)$ за всяко $i \geq l+1$ и $p_l(t) \geq 1$, то от двете страни на неравенството имаме цели числа и следователно:

$$\sum_{i=l+1}^{k} 2^{p_l(t)-p_i(t)} \geq 2^{p_l(t)-1}.$$

Сега полагаме $A = \{i \,|\, i \leq l\}$ и $B = \{i \,|\, i \geq l+1\}$. От горните разсъждения заключаваме, че:

$$\sum_{i \in A} \frac{1}{2^{p_i(t)}} \geq \frac{1}{2} \text{ и } \sum_{i \in B} \frac{1}{2^{p_i(t)}} \geq \frac{1}{2}.$$

Така че, която и група (A или B) да отстрани Том, в момента $t+1$ ще имаме отново, че $S(t+1) \geq 1$. Тъй като $p_i(t)$ намаляват с 1 на всеки ход, в някой момент от време ще има мишка, на която ще съответства $p_i(t) = 0$. Но тогава тази мишка се намира върху сиренето.

Оценяване. (7 точки) Въвеждане на инварианта $S(t)$ и доказателство, че ако този инвариант се запазва, то някоя от мишките ще достигне сиренето – 1 т.; Доказателство на $\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{|OA_i|} \geq 1$ – 2 т. Избор на l, т.е. на разделяне на мишките от момент t, което при $S(t) \geq 1$ води до гарантирано $S(t+1) \geq 1$ – 2 т.; Доказателство, че разделянето на мишките в момент t запазва $S(t+1) \geq 1$ – 2 т.

Забележка. Всъщност достатъчно е лицата на OA_iA_{i+1} да не надминават 1, защото от решението следва, че тогава $S(0) \geq 1$. Нещо повече, ако d е минималното разстояние $|OA_i|$ в началото, то $S(0) \geq d$. Използвайки горните разсъждения може да покажем, че поне d от мишките могат да достигнат сиренето преди да бъдат отстранени.

Забележка: Условието $S(0) \geq 1$ е необходимо и достатъчно за това мишките да си гарантират, че поне една от тях ще достигне сиренето. Наистина, ако $S(t) < 1$, то поне една от групите A или B ще дефинира сума по-малка от $\frac{1}{2}$. Том може да отстрани другата група и да си гарантира, че $S(t+1) < 1$. Тогава никоя мишка никога няма да достигне до сиренето, защото иначе $S(t) \geq 1$ в момента, в който това се случи.

Задача 10.1. Да се намерят всички стойности на параметъра a, за които системата

$$\left| \begin{array}{l} x^2 + 2ax - a^2 + 2 = 0 \\ y^2 + y - x = 0 \end{array} \right.$$

има точно две решения.

Решение. Дискриминантата на $y^2 + y - x = 0$ като квадратно уравнение относно y е $D = 1 + 4x$. Лесно се вижда, че условието е равносилно на това да намерим всички a, за които $x^2 + 2ax - a^2 + 2 = 0$ има точно един корен в интервала $\left[-\frac{1}{4}, \infty\right)$ и той е различен от $-\frac{1}{4}$.

Нека $f(x) = x^2 + 2ax - a^2 + 2 = 0$.
Първи случай.

$$f\left(-\frac{1}{4}\right) < 0 \iff 16a^2 + 8a - 33 > 0 \iff a \in \left(-\infty, \frac{-1-\sqrt{34}}{4}\right) \cup \left(\frac{-1+\sqrt{34}}{4}, \infty\right)$$

Втори случай.

$$D = 0 \iff a^2 = 1 \iff a = \pm 1.$$

Ако $a = 1$ уравнението е $x^2 + 2x + 1 = 0$ и има двоен корен $x_1 = x_2 = -1$, т.е. $a = 1$ не е решение.
Ако $a = -1$ уравнението е $x^2 - 2x + 1 = 0$ и има двоен корен $x_1 = x_2 = 1$, т.е. $a = -1$ е решение.
Окончателно $a \in \left(-\infty, \dfrac{-1-\sqrt{34}}{4}\right) \cup \{-1\} \cup \left(\dfrac{-1+\sqrt{34}}{4}, \infty\right)$.

Оценяване. (6 точки) 1 т. за свеждане до единствен корен на уравнението $x^2+2ax-a^2+2 = 0$ в интервала $\left[-\dfrac{1}{4}, \infty\right)$, различен от $-\frac{1}{4}$; 2 т. за първи случай; 3 т. за втори случай.

Задача 10.2. В остроъгълния триъгълник ABC медианата CM разделя $\measuredangle ACB$ в отношение $2:1$ ($\measuredangle ACM = 2\measuredangle MCB$). Описаната около триъгълник ABC окръжност с център O пресича за втори път описаната около триъгълник MOC окръжност в точка D. Да се докаже, че CD е ъглополовяща за $\measuredangle ACM$.

Решение. (Герджиков) Първо, $\measuredangle COM = \measuredangle COA + \measuredangle AOM = 2\beta + \gamma = 180 - \alpha + \beta > 180 - \alpha$. Следователно, точките D и O са в различни полуравнини спрямо CM, защото в противен случай $\measuredangle COM = \measuredangle CDM < \measuredangle CDB = 180 - \alpha < \measuredangle COM$. Имаме, че $\measuredangle MDO = \measuredangle MCO = \measuredangle ACO - \measuredangle ACM = 90 - \beta - 2\gamma/3$ и $\measuredangle CDM = 180 - \measuredangle COM = 180 - 2\beta - \gamma$. Следователно, $\measuredangle ODC = \measuredangle CDM - \measuredangle MDO = 90 - \beta - \gamma/3$. Но $OD = OC$, като радиуси в окръжност и значи $\measuredangle OCD = \measuredangle ODC$, а оттук и $\measuredangle DCA = \measuredangle OCA - \measuredangle OCD = 90 - \beta - (90 - \beta - \gamma/3) = \gamma/3 = \frac{1}{2}\measuredangle MCA$. Следователно, CD е ъглополовяща за $\measuredangle ACM$.

Оценяване. (6 точки) 1 т. за доказване, че D и O са в различни полуравнини спрямо CM. По 1 т. за изразяването на ъглите $\measuredangle MDO$, $\measuredangle CDM$, $\measuredangle ODC$ и $\measuredangle DCA$. 1 т. за довършване.

Решение. (Данова/Харизанов) Нека BA пресича за втори път описаната около $\triangle MOC$ окръжност k_2 в точка P. Точките A и M са между точките P и B, защото $\measuredangle ACM > \measuredangle MCB$ и следователно O е вътрешна за $\triangle MBC$. Тъй като OM е симетрала за AB, то $\measuredangle PMO = 90^\circ$ и значи PO е диаметър за k_2. Тъй като O е център на описаната около $\triangle ABC$ окръжност k_1, $\{C, D\} \in k_1$ и $\measuredangle OCP = \measuredangle ODP = 90^\circ$, следва че PC и PD са допирателните към k_1 през точката P. Тогава $\measuredangle AMD = \measuredangle PCD$ (от k_2), а $\measuredangle PCD = \measuredangle CBD$ и $\measuredangle DAM = \measuredangle DCB$ (от k_1). Следователно $\triangle DMA \sim \triangle DBC$ и значи

$$\frac{DA}{DC} = \frac{MA}{BC} = \frac{MB}{BC} \Rightarrow \frac{DA}{MB} = \frac{DC}{BC} \Rightarrow \triangle DAC \sim \triangle MBC \; (\measuredangle ADC = \measuredangle MBC).$$

От тук, $\measuredangle ACD = \measuredangle MCB = \frac{1}{2}\measuredangle ACM$ и тъй като D лежи на дъгата AB от k_1, несъдържаща C, то CD е ъглополовяща за $\measuredangle ACM$.

Оценяване. (6 точки) 1 т. за построяването на P и доказването, че PC и PD са допирателни към k_1. По 2 т. за доказване на всяка от двете двойки подобни триъгълници. 1 т. за обяснението, че CD е вътрешна за $\measuredangle ACM$.

Задача 10.3. Една редица a ще наричаме *самопресичаща се*, ако сумата на някои от нейните членове е равна на сумата на някои от другите ѝ членове, т.е. съществуват два по два различни индекси $i_1, i_2, \ldots, i_s, j_1, j_2, \ldots, j_r$, $s, r \geq 1$, такива че $a_{i_1} + \cdots + a_{i_s} = a_{j_1} + \cdots + a_{j_r}$. Например, редицата $1, 3, 5, 7, 9, \ldots$ е самопресичаща се, докато редицата $1, 3, 9, 27, 81, \ldots$ не е. Да се намерят всички двойки естествени числа (α, β), за които редицата: $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_{n+1} = \alpha a_n + \beta a_{n-1}$, $n \geq 2$, е самопресичаща се.

Решение. **Отговор:** $(\alpha, \beta) = (1, 1)$**.** Тъй като $\alpha, \beta \geq 1$ и $a_{n+1} - a_n = (\alpha - 1)a_n + \beta a_{n-1} \geq a_{n-1}$, то по индукция следва, че за всеки избор на естествените (α, β), генерираната редица е строго монотонно растяща и положителна. Да разгледаме произволна самопресичаща се редица от търсения вид. Без ограничение на общността, нека $i_1 < i_2 \cdots < i_s$, $j_1 < j_2 \cdots < j_r$ и $i_s < j_r$. Поради монотонността, не може $r = s = 1$. Ако $\alpha \geq 2$, то $a_{n+1} = \alpha a_n + \beta a_{n-1} > 2a_n$ и

$$a_{j_1} + \cdots + a_{j_r} \geq a_{j_r} > 2a_{j_r-1} > a_{j_r-1} + 2a_{j_r-2} > a_{j_r-1} + \cdots + a_1 > a_{i_1} + \cdots + a_{i_s}.$$

Противоречие. Следователно $\alpha = 1$. Ако $\beta \geq 2$, то $a_{n+1} = a_n + \beta a_{n-1} \geq a_n + 2a_{n-1}$ и

$$a_{j_r} \geq a_{j_r-1} + 2a_{j_r-2} \geq a_{j_r-1} + a_{j_r-2} + a_{j_r-3} + 2a_{j_r-4} \geq \cdots \geq a_{j_r-1} + a_{j_r-2} + \cdots + a_1.$$

Следователно, $\beta = 2$, $r = 1$, $i_s = j_r - 1$ и е в сила равенството $a_{j_r} = a_{j_r-1} + a_{j_r-2} + \cdots + a_1$. Но тогава, $a_{j_r} = a_{j_r-1} + 2a_{j_r-2}$ и значи

$$a_{j_r-2} = a_{j_r-3} + \cdots + a_1 \ \Rightarrow\ a_{j_r-4} = a_{j_r-5} + \cdots + a_1 \ \Rightarrow\ \cdots \ \Rightarrow\ a_2 = a_1 \text{ или } a_1 = 0.$$

Противоречие. Следователно, остава единствената възможност $(\alpha, \beta) = (1, 1)$, водеща до редицата на Фибоначи, която е самопресичаща се защото $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$.

Оценяване. (7 точки) 1 т. за доказване на положителност и монотонност на редицата. 2 т. за случая $\alpha \geq 2$, 3 т. за случая $\alpha = 1, \beta \geq 2$ и 1 т. за показването, че редицата на Фибоначи е самопресичаща се.

Задача 10.4. Виж Задача 9.4.

Оценяване. (7 точки) Въвеждане на инварианта $S(t)$ и доказателство, че ако този инвариант се запазва, то някоя от мишките ще достигне сиренето – 1 т.; Доказателство на $\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{|OA_i|} \geq 1$ – 2 т. Избор на l, т.е. на разделяне на мишките от момент t, което при $S(t) \geq 1$ води до гарантирано $S(t+1) \geq 1$ – 2 т.; Доказателство, че разделянето на мишките в момент t запазва $S(t+1) \geq 1$ – 2 т.

Забележка. Всъщност достатъчно е лицата на OA_iA_{i+1} да не надминават 1, защото това е достатъчно, за да твърдим, че $S(0) \geq 1$. Нещо повече, ако d е минималното разстояние

$|OA_i|$ в началото, то $S(0) \geq d$. Използвайки горните разсъждения тогава може да покажем, че поне d от мишките могат да достигнат сиренето преди да бъдат отстранени.

Задача 11.1. За кои стойности на реалния параметър a уравнението:

$$8^{x^2-x+a^2} - 2^{2x^2-x+2a^2-a+1} - 2^{x^2-2x+a^2+a+2} + 8 = 0$$

има точно три различни реални решения относно x?

Решение. **Отговор:** $a \in \{\frac{1-3\sqrt{2}}{4}, -\frac{1}{2}\}$**.** Да забележим, че лявата страна на уравнението се разлага на

$$8^{x^2-x+a^2} - 2^{2x^2-x+2a^2-a+1} - 2^{x^2-2x+a^2+a+2} + 8 = (2^{2x^2-x+2a^2-a} - 4)(2^{x^2-2x+a^2+a} - 2).$$

Тогава решенията на даденото уравнение са точно решенията на всяко от уравненията: $2x^2-x+2a^2-a = 2$ и $x^2-2x+a^2+a = 1$. Тоест даденото уравнение има точно три различни решения, когато: (i) някое от уравненията има двоен корен, а другото има два релни корена, различни от двойния или (ii) двете уравнения имат общ реален корен, който не е двоен за никое от тях. Първото уравнение има двоен корен при $D_1(a) = 1 - 8(2a^2 - a - 2) = 0$, т.е. при $a = a_1 = \frac{1+3\sqrt{2}}{4}$ или при $a = a_2 = \frac{1-3\sqrt{2}}{4}$. Второто уравнение има двоен корен при $D_2(a) = 4 - 4(a^2 + a - 1) = 0$ и $a_3 = 1$, $a_4 = -2$. Умножавайки второто уравнение по 2 и вадейки от него първото, получаваме че уравненията имат общ корен $x = a$ за $a_5 = 1$ и $a_6 = -\frac{1}{2}$.

Остава да проверим, кои от шестте потенциални стойности на a наистина вършат работа. Тъй като $a_3 = a_5$, то в този случай имаме само две различни решения, защото двойният корен на второто уравнение се явява корен и на първото. Директно се вижда, че $D_2(a_1) < 0$, $D_2(a_2) > 0$, $D_1(a_4) < 0$, $D_1(a_6) > 0$ и $D_2(a_6) > 0$. Следователно единствено a_2 и a_6 вършат работа. Така окончателно даденото уравнение има точно три реални решения при $a \in \{\frac{1-3\sqrt{2}}{4}, -\frac{1}{2}\}$.

Оценяване. (6 точки) 1 т. за разлагането на множители на лявата страна; 1 т. за наблюдението, че тя винаги трябва да има четири реални корена; 2т. за извода, че е необходим двоен корен; по 1 т. за разглеждането на всеки от двата случая за общ корен.

Задача 11.2. В окръжност k с радиус 1 е вписан триъгълник ABC. Точките I и I_a са съответно център на вписаната окръжност и център на външновписаната окръжност към страната BC на триъгълник ABC. Правата BI пресича AC в точка B_1, а правата AI пресича BC в точка A_1. Правата B_1A_1 пресича k в точки P и Q.

а) Да се докаже, че точките I, I_a, P и Q лежат на една окръжност.

б) Да се намери радиусът на описаната окръжност около триъгълник IPQ.

Решение. а) Тъй като $\measuredangle IBI_a = \measuredangle ICI_a = 90^\circ$, то четириъгълникът IBI_aC е вписан в окръжност. Следователно:

$$A_1I.A_1I_a = A_1B.A_1C. \tag{1}$$

Точките P, B, Q и C са върху k. Следователно:

$$A_1B.A_1C = A_1P.A_1Q. \tag{2}$$

От (1) и (2) следва равенството $A_1I.A_1I_a = A_1P.A_1Q$, което означава, че точките I, I_a, P и Q лежат на една окръжност.

б) От а) следва, че точките I, P, Q и I_a лежат на една окръжност. Аналогично доказваме, че точките I, P, Q и I_b лежат на една окръжност (I_b е център на външновписаната окръжност към страната AC). Следователно търсим радиуса на описаната окръжност около триъгълник II_aI_b.
Ще използваме, че ако S е средата на дъгата BC, то $SI = SI_a = SB$. За радиуса r на описаната окръжност на триъгълник IPQ имаме:

$$2r = \frac{II_a}{\sin\measuredangle II_bI_a} = \frac{II_a}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{2SB}{\sin\frac{\alpha}{2}} = 4R_{ABC} = 4.$$

Следователно търсеният радиус е $r = 2$.

Оценяване. (6 точки) 3 т. за а) и 3 т. за б)

Задача 11.3. За естествено число n с $\tau(n)$ означаваме броя на естествените делители на n. Да се намерят всички естествени числа n, за които, ако $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n$ са всички делители на n, то:

$$\tau(d_1) + \tau(d_2) + \cdots + \tau(d_k) = \tau(n^3).$$

Решение. Ако $n = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_t^{\alpha_t}$ лесно се съобразява по индукция, че

$$\tau(d_1) + \tau(d_2) + \cdots + \tau(d_k) = \prod_{i=1}^{t}\frac{(\alpha_i+1)(\alpha_i+2)}{2}.$$

Тъй като $\tau(n^3) = \prod_{i=1}^{t}(3\alpha_i+1)$, то равенството от условието става:

$$\prod_{i=1}^{t}\frac{(\alpha_i+1)(\alpha_i+2)}{2(3\alpha_i+1)} = 1.$$

За функцията $f(x) = \dfrac{(x+1)(x+2)}{2(3x+1)}$ имаме $f(1) = \dfrac{3}{4}$, $f(2) = \dfrac{6}{7}$, $f(3) = 1$ и $f(x) > 1$ за $x \geq 4$.

Ако съществува i, за което $\alpha_i < 3$, то числителят на $\displaystyle\prod_{i=1}^{t}\frac{(\alpha_i+1)(\alpha_i+2)}{2(3\alpha_i+1)}$ ще се дели на 3, докато знаменателят никога не се дели на 3, противоречие. Следователно $\alpha_i \geq 3$ за всяко i и от $f(x) > 1$ за $x \geq 4$ получаваме че $\alpha_i = 3$ за всяко i. Търсените n са от вида $n = m^3$ където m е произволно естествено число, свободно от квадрати.

Оценяване. (7 точки) 3 т. за равенството $\tau(d_1) + \tau(d_2) + \cdots + \tau(d_k) = \prod_{i=1}^{t} \frac{(\alpha_i+1)(\alpha_i+2)}{2}$; 2 т. за $\prod_{i=1}^{t} \frac{(\alpha_i+1)(\alpha_i+2)}{2(3\alpha_i+1)} = 1$; 2 т. за довършване на решението.

Задача 11.4. В математическо състезание с 13 участници били дадени три задачи, като всяка задача се оценявала с 0 до 7 точки. След състезанието се оказало, че няма двама участници с равни резултати и по трите задачи. Да се докаже, че има трима ученици A, B и C, за които:

- A е получил не по-малко точки от B по първа задача;
- B е получил не по-малко точки от C по някоя от другите две задачи;
- C е получил не по-малко точки от A по останалата задача.

Решение. Да наречем тройка от трима ученици „добра“, ако тримата изпълняват условието на задачата. Ако X има не по-малко точки от Y по задача t, записваме $X \xrightarrow{t} Y$. Да допуснем, че в състезание с 13 ученици няма добра тройка.
Ще докажем, че ако трима ученици имат равни резултати по една от задачите, те образуват добра тройка $(*)$.
Нека резултатите на трима ученици A, B и C по трите задачи са съответно (a, x, p), (a, y, q) и (a, z, r), като без ограничение $x \geq y \geq z$. Ако $r \geq q$, то $B \xrightarrow{1} A$, $A \xrightarrow{2} C$ и $C \xrightarrow{3} A$. Ако $r < q$, то $C \xrightarrow{1} A$, $A \xrightarrow{2} B$ и $B \xrightarrow{3} C$.
Ще докажем, че ако A и B имат равни точки по една от задачите, а B и C имат равни точки по друга от задачите, то A, B и C образуват добра тройка $(**)$.
Нека резултатите на трима ученици A, B и C по трите задачи са съответно (a, x, y), (a, b, z) и (m, b, n).
Ако $y \geq n$, то $B \xrightarrow{1} A$, $A \xrightarrow{3} C$ и $C \xrightarrow{2} B$.
Ако $y < n$, то $A \xrightarrow{1} B$, $B \xrightarrow{2} C$ и $C \xrightarrow{3} A$.
Ако X и Y имат равни резултати по някоя от задачите, то те имат различни резултати по някоя от другите две задачи. Без ограничение нека резултатите са a, b, c и a, x, y, като $b \neq x$. Според $(**)$ няма други участници с резултат b или x по втора задача.
Да разгледаме резултатите на всички 13 участници по първа задача. Според $(*)$ няма три равни резултата и следователно има поне 5 двойки равни резултати (защото възможните резултати са 8 и $4.2 + 4 < 13$). Тогава има поне 5 двойки резултати, които се срещат само по един път.
Поне три двойки са по една от останалите две задачи. Това означава, че по една от задачите има три такива двойки. Следователно поне 6 резултата се срещат по един път в тази задача. Тогава участниците са най-много $6 + 2.2 = 10 < 13$, противоречие.
Забележка. Представената таблица с резултати показва, че може да има състезание с 12

участници без добра тройка.

Зад/участник	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	7	7	6	6	5	5	4	3	2	1	0	0
2	7	7	6	5	4	4	3	3	2	2	1	0
3	7	6	5	5	4	3	2	2	1	1	0	0

Оценяване. (7 точки) 2 т. за (∗); 2 т. за (∗∗); 3 т. за довършване на решението;

Задача 12.1. Нека $f_1(x) = \dfrac{3x-1}{x+1}$ и $f_{n+1}(x) = f_n(f_1(x))$, $n \in \mathbf{N}$. Да се пресметне

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{n=4}^{k} \frac{f_n(n-2)-1}{n-3}.$$

Решение. По индукция следва, че (∗) $f_n(x) = \dfrac{(n+2)x-n}{nx-(n-2)}$ и тогава

$$\sum_{n=4}^{k} \frac{f_n(n-2)-1}{n-3} = \sum_{n=4}^{k} \frac{2}{(n-1)(n-2)} = 1 - \frac{2}{k-1} \to 1.$$

Оценяване. (6 точки) 4 т. за (∗) и 2 т. за $l = 1$.

Задача 12.2. В изпъкнал четириъгълник $ABCD$ с I и J са означени центровете на вписаните окръжности в $\triangle ABD$ и $\triangle CBD$. Правата BI пресича страната AD и описаната окръжност около $\triangle ABD$ съответно в точки M и P, а правата BJ пресича страната CD и описаната окръжност около $\triangle CBD$ съответно в точки N и Q. Да се докаже, че $MN||PQ \Leftrightarrow IJ||PQ$.

Решение. Имаме, че

$$BM^2 = AB.DB - AM.DM, \quad BM.PM = AM.DM,$$

откъдето

$$\frac{BM}{PM} = \frac{AB.DB}{AM.DM} - 1 = \left(\frac{DB}{DM}\right)^2 - 1.$$

Аналогично

$$\frac{BN}{QN} = \left(\frac{DB}{DN}\right)^2 - 1$$

и следователно

$$MN||PQ \Leftrightarrow \frac{BM}{PM} = \frac{BN}{QN} \Leftrightarrow DM = DN.$$

По-нататък, да отбележим, че $IP = DP$ и $JQ = DQ$. Освен това, $\triangle DPM \sim \triangle BPD$ и $\triangle DQN \sim \triangle BQD$. Тогава

$$IJ||PQ \Leftrightarrow \frac{IP}{BP} = \frac{JQ}{BQ} \Leftrightarrow \frac{DP}{BP} = \frac{DQ}{BQ} \Leftrightarrow \frac{DM}{BD} = \frac{DN}{BD} \Leftrightarrow DM = DN.$$

Забележка. $MN||PQ \Leftrightarrow PQ||IJ \Leftrightarrow IJ||MN \Leftrightarrow DM = DN$. От друга страна, правите MN, PQ и IJ никога не се пресичат в една точка.

Оценяване. (6 точки) По 3 т. за $MN||PQ \Leftrightarrow DM = DN$ и $IJ||PQ \Leftrightarrow DM = DN$.

Задача 12.3. За естествено число n с $\tau(n)$ означаваме броят на естествените делители на n. Да се намерят всички естествени числа n, за които ако $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n$ са всички негови делители, то:

$$\tau(d_1) + \tau(d_2) + \cdots + \tau(d_k) = \tau(n^3).$$

Решение. Виж решението на Задача 11.3.

Оценяване. (7 точки) 3 т. за равенството $\tau(d_1) + \tau(d_2) + \cdots + \tau(d_k) = \prod_{i=1}^{t} \frac{(\alpha_i+1)(\alpha_i+2)}{2}$; 2 т. за $\prod_{i=1}^{t} \frac{(\alpha_i+1)(\alpha_i+2)}{2(3\alpha_i+1)} = 1$; 2 т. за довършване на решението.

Задача 12.4. Нека $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ е такава функцця, че $f(tz) = |t|f(z)$ и $f(z+w) \leq f(z)+f(w)$ за произволни $t \in \mathbb{R}$ и $z, w \in \mathbb{C}$. Да се докаже, че съществува $c \in \mathbb{C}$ така, че $c \neq 0$ и $f(pc) + f(iqc) \leq 3f(pc + iqc)$ за всеки $p, q \in \mathbb{R}$.

Решение. (Н. Николов) Дадените две условия означават, че множеството $I = \{z \in \mathbb{C} : f(z) \leq 1\}$ е изпъкнало и централно симетрично спрямо началото O. Ако то съдържа права, например реалната ос, можем да изберем изберем $c = 1$. В противен случай I е ограничено множество. След ротация и хомотетия, можем да считаме, че 1 е точка от границата на I, която е най-близка до O. Да изберем $c = 1$. Достатъчно е да докажем, че ако $R = p + iq$ е такова, че $f(p + iq) = 1$, то $p \in I$ и $Q = iq \in 2I$. Първото следва от наблюдението, че $I \subset \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re} z| \leq 1\}$. По-нататък, ако $|q| \leq 1$, то $Q \in I$. Нека сега $|q| > 1$. Можем да изберем точка T върху единичната окръжност така, че отсечката RT е перпендикулярна на OT и пресича ординатната ос в точка S. От $\triangle RSQ \sim \triangle OST$ следва, че $QS/OS < RS/OS = RQ/OT = |p| \leq 1$ и значи $OQ < 2OS$. Понеже $R, T \in I$, то $S \in I$ и тогава $Q \in 2I$.

Оценяване. (7 точки) 1 т. за неограничено I, 2 т. за $p \in I$ и 4 т. за $iq \in 2I$.
Забележка. Функция $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ с дадените две свойства се нарича полунорма в $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$.

Решение. (Ст. Герджиков)

1. $f(0) = 0.f(0) = 0$. След това при $y = -x$ получаваме $f(-x) = f(x)$ и $f(x-x) = f(0) \leq 2f(x)$, откъдето $f(x) \geq 0$.

2. Нека $\{z_n\}$ е произволна редица от комплексни числа, която клони към z. Нека $z_n = a_n + ib_n$ е представянето z_n като сума от реално и (чисто) имагинерно число. Нека $z = a + ib$ е съответното представяне на границата. Тогава $a_n \to_{n\to\infty} a$ и $b_n \to_{n\to\infty} b$. Сега е ясно, че:

$$|f(z_n) - f(z)| \leq f(z - z_n) \leq f((a - a_n) + (b - b_n)i) \leq |a - a_n|f(1) + |b - b_n|f(i).$$

   Тук първите две неравенства следват от неравенството на триъгълника за f (тоест $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$).

Това показва, че f е непрекъсната функция, тоест $\lim_{n\to\infty}|f(z_n) - f(z)| = 0$, защото дясната страна на неравенството клони към 0 независимо от константите $f(1)$ и $f(i)$.

3. Нека c е такова, че $f(c)$ е възможно най-малко измежду всички комплексни числа с норма 1. То съществува, защото f е непрекъсната и всяка редица от точки върху единичната окръжност има сходяща подредица.

4. Нека $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ са произволни с $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. Тогава, ако $c = c_1 + ic_2$, където $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, то условието, че нормата на c е 1 е всъщност $c_1^2 + c_2^2 = 1$. Сега е ясно, че

$$|\alpha c + i\beta c| = (\alpha c_1 - \beta c_2)^2 + (\alpha c_2 + \beta c_1)^2 = (c_1^2 + c_2^2)(\alpha^2 + \beta^2) = 1.$$

От избора на c получаваме, че $f(c) \leq f(\alpha c + i\beta c)$. Освен това от неравенството на триъгълника за f имаме:

$$|\beta|f(ic) = f(i\beta c) = f((\alpha + i\beta)c - \alpha c)) \leq f((\alpha + i\beta)c) + f(-\alpha c) = f((\alpha + i\beta)c) + |\alpha|f(c)$$

Като отчетем, че $f((\alpha + i\beta)c) \geq f(c)$ получаваме, че:

$$|\alpha|f(c) + |\beta|f(ic) \leq |\alpha|f((\alpha + i\beta)c) + 2|\alpha|f(c) \leq (1 + 2|\alpha|)f((\alpha + i\beta)c).$$

Но $\alpha^2 \leq 1$, следователно $|\alpha| \leq 1$, откъдето $(1+2|\alpha|) \leq 3$ и тъй като f е неотрицателна, то:

$$|\alpha|f(c) + |\beta|f(ic) \leq 3f((\alpha + i\beta)c).$$

5. Накрая нека $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ са произволни като $t = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$. Ако $t = 0$, то $\alpha = \beta = 0$ и твърдението $3f((\alpha + i\beta)c) \geq |\alpha|f(c) + |\beta|f(ic)$ е очевидно, защото $f(0) = 0 \geq 0$.

   Ако $t > 0$, то $\alpha_1 = \frac{\alpha}{t}$ и $\beta_1 = \frac{\beta}{t}$ имат свойството $\alpha_1^2 + \beta_1^2 = 1$ и от предишната точка:

$$3f((\alpha_1 + i\beta_1)c) \geq |\alpha_1|f(c) + |\beta_1|f(ic).$$

   Умножаваме двете страни с $t > 0$ и използваме, че $f(tz) = tf(z)$ в този случай. Тогава:

$$3f((\alpha + i\beta)c) = 3tf((\alpha_1 + i\beta_1)c) \geq t|\alpha_1|f(c) + t|\beta_1|f(ic) = |\alpha|f(c) + |\beta|f(ic).$$

Оценяване. (7 точки) 1 т. за $f(0) = 0$ и $f(x) \geq 0$; 2 т. за f непрекъсната; 1 т. за избор на минимум по единична окръжност; 2 т. за доказателство на $3f((\alpha_1 + i\beta_1)c) \geq |\alpha_1|f(c) + |\beta_1|f(ic)$; 1 т. за довършване

Задачите са предложени от: 8.1, 8.3 – Иван Тонов; 8.2 – Емил Стоянов; 8.4 – Ивайло Кортезов; 9.1, 9.2 – Диана Данова; 9.3 – Петър Бойваленков; 9.4=10.4, 11.1 – Стефан Герджиков; 10.2 – Диана Данова / Станислав Харизанов; 10.3 – Станислав Харизанов; 10.1, 11.3=12.3 – Александър Иванов; 11.2, 11.4 – Емил Колев; 12.1, 12.2, 12.4 – Николай Николов