<u>Десети български фестивал на младите математици</u>

Четвърти кръг, Тема за 10 – 12 клас

РЕШЕНИЯ

Задача 1. Точките M и N са от страната BC на триъгълника ABC, като $BM = CN$ и M е между B и N. Точките $P \in AN$ и $Q \in AM$ са такива, че $\sphericalangle PMC = \sphericalangle MAB$ и $\sphericalangle QNB = \sphericalangle NAC$. Да се докаже, че $\sphericalangle QBC = \sphericalangle PCB$.

Решение. Нека A' и P' са симетричните точки на A и P относно симетралата на BC. Означаваме $X = NQ \cap A'B$ и $Y = NP' \cap AB$. От симетрията имаме $P' \in A'M$.
Тъй като $AA'MN$ е равнобедрен трапец, то точките A, A', M, N лежат на една окръжност. От друга страна, $\sphericalangle XNM = \sphericalangle NAC = \sphericalangle XA'M$ и значи A', X, M, N също лежат на една окръжност. Аналогично A, Y, N и M лежат на една окръжност. Следователно точките A, A', M, N, X и Y лежат на една окръжност. Тогава от теоремата на Паскал получаваме $P' \in BQ$ и следователно $\sphericalangle QBC = \sphericalangle P'BC = \sphericalangle PCB$.

Задача 2. Дадено е естествено число n. Първоначално клетките на таблица $2n \times 2n$ са бели. Двама играчи A и B играят следната игра. Първо A оцветява m от клетките в червено. След това B избира n реда и n колони и оцветява полетата от тях в черно. Печели A точно когато остане поне едно червено поле. Да се намери най-малката възможна стойност на m, при която A може да спечели без значение как B играе.

Отговор: $3n + 1$. Нека първо $m \leq 3n$. Тогава B избира първо да оцвети n-те реда с най-голям брой червени клетки. Ако допуснем, че остават поне $n + 1$ червени клетки, то поне един от неоцветените в черно редове съдържа поне 2 червени клетки. Тогава от максималността имаме, че всеки черен ред съдържа поне 2 черни клетки и значи броят на почернелите червени клетки е поне $2n$. Но тогава остават най-много n червени клетки (които не са в черно), противоречие. Следователно остават най-много n червени клетки и е достатъчно B да избере техните колони (това е възможно, тъй като има право на n колони).

Сега нека $m = 3n + 1$. Тогава A печели като оцвети клетките с координати:

$$(1,1);\quad (i, i+1) \text{ за } 1 \leq i \leq n;\quad (i+1, i) \text{ за } 1 \leq i \leq n;\quad (j, j) \text{ за } n+1 \leq j \leq 2n$$

Наистина, да допуснем, че B може да оцвети всичките в черно. Клетките $(j, j), n + 2 \leq j \leq 2n$ са непременно оцветени чрез $n - 1$ различни линии (редове или колони), които не съдържат други червени полета и значи останалите $2n + 2$ полета трябва да се преоцветят в черно чрез оставащите $n+1$ линии. Тъй като никоя линия не съдържа повече от две червени полета, трябва всяко червено поле да принадлежи на точно една от тези линии. Без ограничение нека $(1, 1)$ е преоцветена в черно чрез ред. Нека k е най-малкото естествено число такова, че редът k, $2 \leq k \leq n+1$ не е черен (такова има, иначе ще имаме общо поне $n+1$ черни реда, противоречие). Тогава полето $(k, k-1)$ трябва да бъде в черно чрез колона $k - 1$. Но в тази колона има друго червено поле $(j, k - 1)$, което принадлежи на черния ред с номер $j < k$, което противоречи на минималността на k.

Задача 3. Естественото число $n > 1$ е такова, че има естествено число a и просто число q, които изпълняват следните условия:

- q дели $n-1$ и $q > \sqrt{n}-1$
- n дели $a^{n-1}-1$
- НОД$(a^{\frac{n-1}{q}}-1, n) = 1$.

Възможно ли е n да е съставно число?

Решение. Не! Да допуснем, че е възможно и нека p е прост делител на n, за който $p \leq \sqrt{n}$. От първото условие следва $q > \sqrt{n}-1 \geq p-1$ и понеже q е просто, получаваме НОД$(q, p-1) = 1$. Така от теоремата на Безу съществуват цели числа x и k (в случая можем да приемем, че са естествени), за които $qx = (p-1)k+1$. Тъй като p дели n, второто условие дава $a^{n-1} \equiv 1 \pmod{p}$, откъдето

$$1 \equiv (a^{n-1})^x \equiv (a^{\frac{n-1}{q}})^{qx} \equiv (a^{\frac{n-1}{q}})^{(p-1)k+1} \equiv ((a^{\frac{n-1}{q}})^k)^{p-1}.a^{\frac{n-1}{q}} \equiv a^{\frac{n-1}{q}} \pmod{p}$$

(за последното сравнение използвахме теоремата на Ферма). Следователно p е общ прост делител на $a^{\frac{n-1}{q}}-1$ и n, което противоречи на третото условие.

Задача 4. Вярно ли е, че за всяко просто число p съществуват неконстантни полиноми P и Q на променливата x и с цели коефициенти, за които остатъкът при деление на p на коефициента пред x^n в нормалния вид на произведението PQ е 1 за $n = 0$ и $n = 4$; $p-1$ за $n = 2$ и е 0 за всяко друго $n \geq 0$?

Решение. Да! При $p = 2$ и $p = 3$ е достатъчно да изберем съответно $P = Q = x^2+x+1$ и $P = Q = x^2+1$. Нека $p \geq 5$. Поне едно от числата -1, -3 и 3 е квадратичен остатък по модул p (иначе произведението им, което е 9, би било квадратичен неостатък). Ако $s^2 \equiv -1 \pmod{p}$ за някое s, получаваме (с точност до модул p) $x^4-x^2+1 = (x^2-1)^2 - s^2x^2 = (x^2-sx-1)(x^2+sx-1)$. Ако $s^2 \equiv 3 \pmod{p}$ за някое s, то (с точност до модул p) $x^4-x^2+1 = (x^2+1)^2 - s^2x^2 = (x^2-sx+1)(x^2+sx+1)$. Ако $s^2 \equiv -3 \pmod{p}$ за някое s, то (с точност до модул p) $4(x^4-x^2+1) = (2x^2-1)^2 - s^2 = (2x^2-s-1)(2x^2+s-1)$ и умножавайки двете страни по число t, за което $4t \equiv 1 \pmod{p}$ (такова има по теоремата на Безу), получаваме исканото.

Задача 5. Ненамаляващите функции $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ са такива, че $f(r) \leq g(r)$ за всяко рационално число r. Вярно ли е, че $f(x) \leq g(x)$ за всяко реално число x?

Решение. Не! Избираме $f(x) = 1$ за $x \geq \sqrt{3}$ и 0 иначе; $g(x) = 1$ за $x > \sqrt{3}$ и 0 иначе.

Задача 6. Да се намерят всички функции $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, такива че за всеки две $x, y \in \mathbb{N}_0$ е изпълнено

$$xf(y) + yf(x) = (x+y)f(x^2+y^2)$$

(С $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ се означава множеството на целите неотрицателни числа.)

Решение. При $x = 0$ и $y \neq 0$ получаваме $yf(0) = yf(y^2)$, т.е. $f(y^2) = f(0)$. Заместваики $y \neq 0$ с y^2 в даденото, получаваме $xf(0) + y^2f(x) = (x+y^2)f(x^2+y^4)$, т.е. $x(f(0)-f(x)) + (x+y^2)f(x) = (x+y^2)f(x^2+y^4)$. Така за фиксирано x, $x(f(0)-f(x))$ се дели на $x+y^2$ за всяко $y \neq 0$ (впрочем, очевидно и за $y = 0$) и в частност има безбройно много делители. Последното е възможно само когато то е 0, т.е. $f(x) = f(0)$ за всяко x. Обратно, ясно е, че всяка константна функция е решение на задачата.

Задача 7. Нека n е естествено число. Графът G е с $10n$ върха. Тези върхове са разделени на 10 групи от по n върха и между два върха в G има ребро тогава и само тогава, когато са в различни групи. Колко най-много ребра може да има подграф на G, който не съдържа пълен граф с 4 върха?

Отговор: $33n^2$**.** Да означим върховете в i-тата група с A_1^i, A_2^i, $\ldots$, A_n^i. Всяко ребро на G е в точно n^8 копия на пълния граф с 10 върха, съдържащи се в G. Следователно броят ребра на подграф можем да запишем като

$$\frac{\sum_{j_1,j_2,\ldots,j_{10}} \sum_{k_1,k_2} (\mathbf{1}_{A^{k_1}_{j_{k_1}} A^{k_2}_{j_{k_2}} \in E(G)})}{n^8}$$

където $\mathbf{1}_{xy\in E(G)} = 1$ ако xy е ребро и 0 иначе. За подграф, несъдържащ K_4, всяко от събираемите на външната сума в числителя е най-много 33 (понеже максималния подграф на K_{10}, без копия на K_4, има 33 ребра съгласно теоремата на Туран). Броят на събираемите е n^{10} и така получаваме оценката $\frac{33n^{10}}{n^8} = 33n^2$. Примерът се конструира аналогично.

Задача 8. Даден е триъгълник ABC. Точката D от описаната му окръжност k е такава, че CD е симедиана в $\triangle ABC$ (т.е. $\sphericalangle BCD = \sphericalangle ACM$, където M е средата на AB). Нека X и Y са от лъчите CB и CA, като $CX = 2CA$ и $CY = 2CB$. Да се докаже, че окръжността, допираща се външно до k и до правите CA и CB, се допира до описаната около триъгълника XDY окръжност.

Решение. При композиция на инверсия с център C и радиус $\sqrt{CA.CB}$ и симетрия относно ъглополовящата на $\sphericalangle ACB$ точките X и Y отиват в средите M и N на AC и BC, а D отива в средата на AB. Окръжността, допираща се външно до k и правите CA и CB, отива във вписаната за $\triangle ABC$. Следователно задачата се свежда до случая на теоремата на Фойербах за допирането на вписаната окръжност и окръжността на Ойлер за $\triangle ABC$.