Десети български фестивал на младите математици

Четвърти кръг, Тема за 6 – 7 клас

РЕШЕНИЯ

Задача 1. Намерете броя на наредените двойки двуцифрени числа $(m; n)$, за които е изпълнено равенството

$$\text{НОД}(m+1, n+1) = 10.\text{НОД}(m, n).$$

Решение. Тъй като 10 дели $\text{НОД}(m+1, n+1)$, то 10 дели $n+1$ и $m+1$. Следователно m и n са сред числата 19, 29, 39, 49, 59, 69, 79, 89, 99.

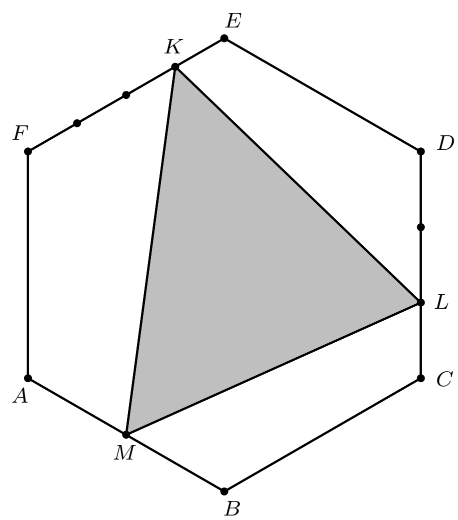
1) Нека първо m и n не са взаимнопрости. Това са двойките $(39, 69)$ $(39, 99)$, $(69, 99)$ и обратно; лесно се вижда, че те не са решения.

2) Ако m и n са взаимнопрости, то $\text{НОД}(m+1, n+1) = 10$. Това означава, че $a = \dfrac{m+1}{10}$ и $b = \dfrac{n+1}{10}$ са взаимнопрости. Тъй като a и b са от множеството 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, лесно определяме търсените (ненаредени) двойки:

(2,3), (2, 5), (2, 7), (2, 9), (3, 4), (3, 5), (3, 7), (3, 8), (3, 10), (4, 5), (4, 7), (4, 9), (5, 6), (5, 7), (5, 8), (5, 9), (6, 7), (7, 8), (7, 9), (7, 10), (8, 9), (9, 10)

От 1) отпадат двойките (4,7) и (7, 10). Остават 20 ненаредени двойки, т.е. търсените наредени двойки са 40.

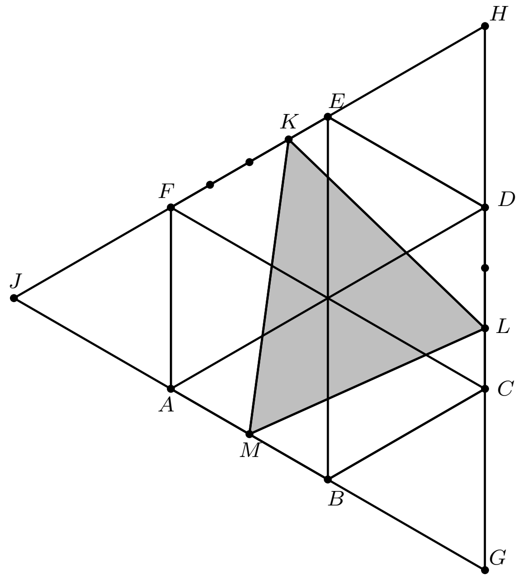
Задача 2. Даден е правилен шестоъгълник $ABCDEF$. Точката M от страната AB е такава, че $AM = \dfrac{1}{2}AB$; точката L от страната CD е такава, че $CL = \dfrac{1}{3}CD$; точката K от страната EF е такава, че $EK = \dfrac{1}{4}EF$.



а) Ако лицето на шестоъгълника е 720, да се намери лицето на триъгълника KLM.

б) Отсечките KL, LM и MK разделят шестоъгълника на четири фигури. Лицето на една от четирите фигури е с 10% по-голямо от общото лице на други две, а четвърта има лице 1430. Да се намери лицето на шестоъгълника.

Решение. Да продължим три страни на шестоъгълника така, както е показано на чертежа, и да построим големите диагонали на шестоъгълника. Те го разделят на 6 еднакви равнострании триъгълника; ако тяхното лице е s, лицето на шестоъгълника е $S = 6s$, а лицето на равностранния триъгълник JHG е $S^\star = 9s$.



Последователно изразяваме:

$$S_{JMK} = \frac{7}{12}\cdot\frac{1}{2}S^\star = \frac{21}{8}s,\quad S_{MGL} = \frac{4}{9}\cdot\frac{1}{2}S^\star = 2s,\ \ S_{KLH} = \frac{5}{12}\cdot\frac{5}{9}S^\star = \frac{25}{12}s,$$
$$S_{KLM} = 9s - \left(\frac{21}{8}s + 2s + \frac{25}{12}s\right) = \frac{55}{24}s.$$

а) Ако $6s = 720$, то $s = 120$ и $S_{KLM} = 275$.

б) Четирите части, на които е разделен шестоъгълника, имат лица $\frac{55}{24}s$, $\frac{13}{12}s$, s и $\frac{13}{8}s$. Лесно се вижда, че $\frac{55}{24}s$ е с 10% по-голямо от $\frac{13}{12}s + s = \frac{50}{24}s$, следователно $\frac{13}{8}s = 1430$. Оттук $s = 110$ и лицето на шестоъгълника е 660.

Задача 3. Край бреговете на Бахрейн водолазите Боб, Джак и Уил се гмуркали за перли. В края на деня всеки преброил своя улов и провели следния разговор:

Боб: Ако Джак ми даде една от своите перли, ще имам с 20% повече перли от Уил.

Джак: Ако Уил ми даде една от своите перли, тогава $\frac{2}{3}$ от моите перли ще са колкото $\frac{3}{4}$ от неговите.

Уил: Броят на общия ни улов е трицифрено огледално число.

По колко монети е събрал всеки от тримата водолази?

Решение. Броят на перлите на Уил се дели на 5; нека е $5k$. Тогава Боб има $120\%.5k - 1 = 6k - 1$ перли.

Ако Джак има x перли, то $\dfrac{2}{3}(x+1)=\dfrac{3}{4}(5k-1)$. Оттук $8x=45k-17$ и $45k-17$ се дели на 8, т.е. $3k+1$ се дели на 8. Следователно k дава остатък 5 при деление на 8, т.е. $k=8l+5$. Тогава Джак има $x=45l+26$ перли, Уил има $40l+25$ перли, а Боб има $48l+29$ перли.

Общият брой на перлите е $133l+80$ и е трицифрено огледално число при $l=6$; тогава е 878.

Получаваме съответно 296, 265, 317 перли за тримата.

Задача 4. По колко различни начина могат да се наредят буквите А, И, О, П, К, Р, С така, че в редицата да не се среща подредица АСО, КАРО или ПИКА?

Решение. Седемте букви могат да се подредят по 7! начина.

Редиците, в които се среща подредица АСО, се получават при разместване на АСО, И, П, К, Р и са 5!.

Редиците, в които се среща подредица ПИКА, се получават при разместване на ПИКА, С, О, Р и са 4!.

По същия начин, редиците, в които се среща КАРО, са 4!.

Редиците, в които се срещат АСО и ПИКА, се получават при разместване на ПИКАСО и Р и са 2.

Редиците, в които се срещат КАРО и ПИКА, се получават при разместване на ПИКАРО и С и са 2.

Няма редици, в които се срещат КАРО и АСО.

Търсеният брой е $7!-(5!+2.4!-2.2)=4876$.

Задача 5. Съществуват ли такива различни естествени числа a, b и c за които числата $a+b+c$, $ab+bc+ca$ и $3abc$ имат следното свойство:

а) Ако съберем две от тях, ще получим резултат, два пъти по-голям от третото?

б) Ако умножим две от тях, ще получим резултат, равен на квадрата на третото?

Отговор: а) Не б) Не. Без ограничение нека $1\le a<b<c$. Тогава $a<ab<abc$, $b<bc<abc$, $c<ca<abc$, откъдето непременно $a+b+c<ab+bc+ca<3abc$.

а) В този случай разглеждаме $2(ab+bc+ca)=a+b+c+3abc \Leftrightarrow a(b(c-2)+1)+b(c(a-2)+1)+c(a(b-2)+1)=0$. Ако $a,b,c\ge 2$ лявата страна е положителна, което е невъзможно. Така без ограничение $a=1$ и $(b-1)(c-1)=0$, което също е невъзможно.

б) Тук е достатъчно да съобразим, че

$$2((ab+bc+ca)^2-3abc(a+b+c))=(ab-bc)^2+(bc-ca)^2+(ca-ab)^2>0$$

Задача 6. Да се намери най-малката възможна стойност на най-големия прост делител на естествено число, което завършва на 33.

Отговор: 11. Числото $33=3.11$ завършва на 33. Да допуснем, че има число n, което завършва на 33 и има само 2, 3, 5 и 7 (не непременно всички) като прости делители. Такова число е нечетно и не окончава на 5 и значи само 3 и 7 остават възможни прости делители. Нека $n=3^x.7^y$. Тъй като n завършва на 33, то дава остатък 1 при деление на 4. Следователно $3^x.7^y\equiv 3^{x+y} \pmod 4$ дава остатък 1 и значи $x+y$ е четно (тъй като $3^2\equiv 1$ и $3\not\equiv 1$). Нататък, 3^x дава остатъци при деление на 5 съответно $3,4,2,1$ – за четни x имаме 4 и 1, а за нечетни x имаме 3 и 2. Също, 7^y дава остатъци при деление на 5 съответно $2,3$ за нечетни y и $4,1$ за четни y. Тъй като x и y са с еднаква четност (понеже $x+y$ е четно), оставаме с възможностите за остатък при деление на 5: като този на $4.4, 4.1, 1.1, 3.2, 3.3, 2.2, 2.3$, т.е. 4 или 1. От друга страна, 33 (а значи и n) дава остатък 3 при деление на 5, противоречие.

Задача 7. Ще наричаме естественото число $n \geq 2$ *яко*, ако можем да разположим числата $1, 2, \ldots, 6n$ в полетата на таблица $6 \times n$ така, че сборът на числата във всеки квадрат 2×2 да е нечетен. Колко са яките трицифрени числа?

Отговор: 675. Ако n се дели на 4, то можем да сглобим подходящ брой таблички от вида

н	н	ч	ч
ч	н	н	ч
н	н	ч	ч
ч	н	н	ч
н	н	ч	ч
ч	н	н	ч

Ако n дава остатък 3 при деление на 4, то горе можем да махнем най-левия стълб. Ако n дава остатък 1 при деление на 4, то можем да добавим отдясно още един стълб като най-левия. Ако n дава остатък 2 при деление на 4, то сборът на числата в таблицата е четен, а трябва да се представи като сбор на нечетен брой нечетни събираеми, което е невъзможно.

Търсеният брй е $\frac{3}{4}900 = 675$.

Задача 8. Емо и Иво се разхождали по плажа в Созопол. Емо тръгнал от северния край на плажната ивица, а едновременно с него Иво тръгнал на юг от точка, която се намира 2 пъти по-близо до северния край, отколкото до южния. Емо настигнал Иво, когато той стигнал до точка, която е 3 пъти по-близо до южния край, отколкото до северния. След това Емо стигнал до южния край на плажа, веднага тръгнал обратно и срещнал Иво в точка X. Всеки продължил разходката си: Иво до южния край и после обратно, Емо до северния край и после обратно, и се срещнали в точка Y, която е на 720 метра от X. Да се намери дължината на плажа.

Решение. Нека дължината на плажа е S. До настигането Емо изминал $\frac{3}{4}S$, а Иво изминал $\frac{3}{4}S - \frac{1}{3}S = \frac{5}{12}S$, следователно скоростта на Емо е $1,8$ пъти по-голяма от скоростта на Иво.

Ако след настигането Иво е изминал разстояние x до срещата в точка X, то Емо е изминал $1,8x$. Имаме $x + 1,8x = 2 \cdot \frac{1}{4}S$, следователно $x = \frac{5}{28}S$. Точката X се намира на $\frac{1}{4}S - \frac{5}{28}S = \frac{1}{14}S$ от южния край на плажа.

Нека от срещата в X до срещата в Y Иво е изминал разстояние y; значи Емо е изминал $1,8y$. Имаме $y + 1,8y = 2S$, значи $y = \frac{5}{7}S$. Тогава $XY = \frac{5}{7}S - 2 \cdot \frac{1}{14}S = \frac{4}{7}S$ и намираме $S = 720 : \frac{4}{7} = 1260$ м.