Десети български фестивал на младите математици

Четвърти кръг, Тема за 8 – 9 клас

РЕШЕНИЯ

Задача 1. Изпъкналият четириъгълник $ABCD$ е такъв, че $AC = BD = AB$. Диагоналите AC и BD се пресичат в точка O. Точките M и N са средите на страните AD и BC, съответно. Точките X, Y и Z съответно от отсечките AO, OB и AB са такива, че $AX = AZ$, $BY = BZ$ и $OX = OY$. Да се докаже, че точките M, X, Y и N лежат на една права.

Решение. От дадените равенства получаваме $DY = BD - BY = AB - BZ = AZ = AX$. Да означим $S_{AMX} = S_{DMX} = S$ и $\frac{DY}{OY} = \frac{AX}{OX} = k > 1$. Тогава $S_{AXY} = \frac{S_{AXD}}{k-1} = \frac{2S}{k-1}$, $S_{OXY} = \frac{OX}{XA} S_{AXY} = \frac{2S}{k(k-1)}$ и $S_{OXD} = (k-1)S_{OXY} = \frac{2S}{k}$. Така $S_{DXY} = S_{DXO} + S_{OXY} = \frac{2S}{k-1} = S_{AXY}$. Сега ако $W = XY \cap AD$, то $\frac{AW}{WB} = \frac{S_{AXY}}{S_{DXY}} = 1$, откъдето W е средата на AD и в частност W съвпада с M.
Следователно точките M, X и Y лежат на една права. Аналогично N, X и Y лежат на една права и исканото следва.

Задача 2. За реалните числа $0 \le a, b, c, d \le 1$ да се докаже, че

$$ab(a-b) + bc(b-c) + cd(c-d) + da(d-a) \le \frac{8}{27}$$

и да се намерят всички четворки (a, b, c, d), при които се достига равенство.

Решение. Изразът е равен на $S = (b-d)(a-c)(a+c-b-d)$. Без ограничение нека $a \ge c$. Имаме два случая:

- Нека $b \ge d$. Тогава ако $a + c - b - d \le 0$ сме готови; иначе от САСГ (по точно $xyz \le (\frac{x+y+z}{3})^3$ за $x, y, z \ge 0$) върху $a - c$, $b - d$ и $a + c - b - d$ получаваме

$$S \le \left(\frac{(b-d) + (a-c) + (a+c-b-d)}{3}\right)^3 = \left(\frac{2a-2d}{3}\right)^3 \le \frac{8}{27}$$

  като равенство се достига при $a = 1$, $d = 0$ и $a - c = b - d = a + c - b - d$, т.е. $b = \frac{2}{3}$, $c = \frac{1}{3}$. Възможността $a \le c$ дава и четворката $a = \frac{1}{3}$, $b = 0$, $c = 1$, $d = \frac{2}{3}$.

- Ако $b \le d$, записваме $S = (d-b)(a-c)(b+d-a-c)$ и при $a + c - b - d \ge 0$ имаме $S \le 0$ и сме готови, а иначе точно като в предишния случай получаваме $S \le \frac{8}{27}$, с равенство при $a = \frac{2}{3}$, $b = \frac{1}{3}$, $c = 0$, $d = 1$ (и $a = 0$, $b = 1$, $c = \frac{2}{3}$, $d = \frac{1}{3}$ при $a \le c$).

Задача 3. Докажете, че съществува естествено число a, за което 2019 дели $338^n + a.335^n$ за всяко нечетно естествено число n и намерете най-малкото такова a.

Отговор: 674. Тъй като $2019 = 3.673$, НОД$(3; 673) = 1$, $338 \equiv 335(\pmod 3)$ и $338 \equiv 335(\pmod{673})$, условието е изпълнено точно когато 3 дели $(a+1)335^n$ и 673 дели $(a1)335^n$. Сред числата, за които $a \equiv 1(\pmod{673})$, най-малкото, за което $a \equiv 1 \pmod 3$, е 674.

Задача 4. Нека $a > 0$ и $4a + 3b + 2c > 0$. Да се докаже, че не е възможно уравнението $ax^2 + bx + c = 0$ да има два реални корена в интервала $(1, 2)$.

Решение. Да допуснем, че това се случва за корените x_1 и x_2. Разделяйки на 2 и ползвайки Виет, получаваме

$$2 - 1,5(x_1 + x_2) + x_1x_2 > 0 \Rightarrow (x_1 - 1,5)(x_2 - 1,5) > 0,25.$$

Но според допускането $|x_1 - 1,5| < 0,5$ и $|x_2 - 1,5| < 0,5$, така че получаваме абсурда $0,5.0,5 > 0,25$.

Задача 5. Дадена е квадратна таблица. *Змия с дължина* k е животно, което заема наредена последователност от k клетки, да речем $(s_1, s_2, \dots, s_k)$ (в s_1 се намира главата на змията, а в s_k – нейната опашна част). Клетките трябва да са две по две различни и всеки две клетки с последователни номера имат обща страна (т.е. s_1 и s_2 имат обща страна, s_2 и s_3 също и т.н.). Ако в някой момент змията е в клетките $(s_1, s_2, \dots, s_k)$ и s е незаета от змията клетка, която е съседна (по обща страна) на s_1, то змията може да се *придвижи* и да заеме клетките $(s, s_1, \dots, s_{k-1})$ (т.е. сега главата и е в s, а опашката и – в s_{k-1}). Казваме, че змията се е *обърнала*, ако в началото заема клетките $(s_1, s_2, \dots, s_k)$ и след краен брой ходове заема клетките $(s_k, s_{k-1}, \dots, s_1)$ (т.е. главата и е на s_k, а опашката – на s_1).

Определете най-голямото k, за което можем да поставим змия в таблица 3×3, която може да се обърне.

Отговор: $k = 5$. Да означим квадратчетата на таблицата с A, B, C на първия ред, D, E, F на втория и G, H, I на третия. При $k = 5$ поставяме змията първоначално на (A, B, C, F, E) (главата и е на A) и чрез преместванията на главата $A \to D \to G \to H \to I \to F \to E \to D \to A \to B \to C \to F \to E$ змията се обръща.
Нека сега $k \geq 6$. Ще казваме, че змията е *затисната*, ако няма незаети клетки, съседни на s_1 (клетката, в която се намира главата и). Ясно е, че ако змията е затисната, тя не може да се обърне. Оцветяваме шахматно клетките на таблицата, като E е бяла. Да забележим, че всеки две съседни клетки на змията са в различни цветове – така змия с дължина поне 6 покрива във всеки момент поне 3 черни и поне 3 бели клетки.

При всяко движение на змията, клетката, която преди е била заета от опашката (последната клетка) става празна. Да отбележим, че тази клетка не може веднага да се заеме от главата, тъй като главата трябва да заеме клетка, която преди е била незаета. Също, всеки път когато главата е на бяла клетка, при движение тя отива в черна и обратно. Понеже броят на черните клетки е 4, а змията винаги заема 3 от тях, има най-много една възможна черна клетка, в която тя може да отиде (ако всъщност няма, то змията ще е затисната). Сега да разгледаме само последователността (от глава, към опашка и накрая евентуално една празна клетка) от черни клетки. Имаме два случая:

- Ако главата е била на черна клетка, при движение последователността не се променя, тъй като всяка черна клетка от змията се премества с една позиция надясно (относно змията) и последната черна клетка става незаета (или е била незаета от преди).

- Ако главата е била на бяла клетка, то последната клетка (незаетата) се заема от главата, т.е. тя става в началото на последователността. Останалите черни клетки се преместват с една позиция надясно (относно змията).

Следователно последователността на черните клетки непрестанно се завърта циклично. В частност, никога не може да се случи тя да стане в обратен ред (спрямо някое предишно положение), което обаче е необходимо, за да може змията да се обърне. Противоречие.

Задача 6. В правоъгълния $\triangle ABC$ с прав ъгъл при върха C е вписана окръжност, която допира катетите BC, CA и хипотенузата AB съответно в точки M, N и P. Да се докаже, че пресечната точка на височините на $\triangle MNP$ лежи на височината CD на $\triangle ABC$.

Задача 7. Да се докаже, че за всяко естествено число n числото

$$\frac{(4n)!(6n)!(9n)!(24n)!}{(2n)!(3n)!(8n)!(12n)!(18n)!}$$

е естествено.

Решение. Известен факт е, че най-високата степен на просто число p, деляща m, е с показател $\sum_{i=1}^{\infty} \lfloor \frac{m}{p^i} \rfloor$ и следователно е достатъчно да докажем неравенството

$$\lfloor 4x \rfloor + \lfloor 6x \rfloor + \lfloor 9x \rfloor + \lfloor 24x \rfloor - \lfloor 2x \rfloor - \lfloor 3x \rfloor - \lfloor 8x \rfloor - \lfloor 12x \rfloor - \lfloor 18x \rfloor \geq 0$$

за всяко положително реално число x. Представяйки $x = \lfloor x \rfloor + \alpha$, $\alpha \in [0, 1)$ достигаме до горното неравенство, но за α. И наистина, във всеки от случаите $\alpha \in [\frac{1}{24}, \frac{1}{18})$, $\alpha \in [\frac{1}{18}, \frac{1}{12}), \alpha \in [\frac{1}{12}, \frac{1}{9})$, $\alpha \in [\frac{1}{9}, \frac{1}{8})$ и $\alpha \in [\frac{i-1}{24}, \frac{i}{24})$, $i = 1, 4, 5, 6 \ldots, 23, 24$ (скобките се смятат директно – например за $\alpha \in [\frac{1}{8}, \frac{1}{6})$ те са съответно 0, 0, 1, 3, -0, -0, -1, -1, -2) исканото е изпълнено.

Задача 8. Да се намерят всички цели решения на $xy + yz + zx - xyz = 2$.