МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
СЪЮЗ НА МАТЕМАТИЦИТЕ В БЪЛГАРИЯ

ЗИМНИ МАТЕМАТИЧЕСКИ СЪСТЕЗАНИЯ

П Л Е В Е Н

1 – 3 февруари 2008 г.,

Задачите и темите са обсъдени от членовете на Националната комисия по математика 4 – 8 клас в състав:

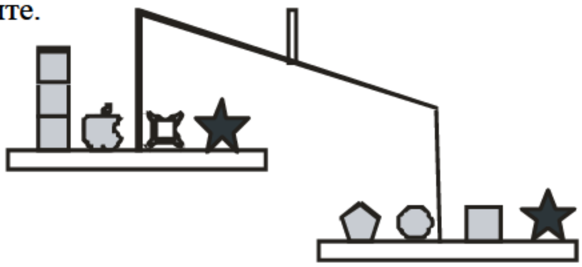
проф. Сава Гроздев – председател
Емил Карлов и гл. ас. Иван Ангелов – отговорници за 4 клас
ст.н.с. Тони Чехларова и докторант Ирина Шаркова – отговорници за 5 клас
ст.н.с. Борислав Лазаров и ас. Симеон Замковой – отговорници за 6 клас
докторант Светлозар Дойчев – отговорник за 7 клас
ст.н.с. Ивайло Кортезов – отговорник за 8 клас

Автори на задачите са:

Емил Карлов – 4.2, 4.3, 4.4, 5.2, 7.2, 8.1
Иван Ангелов – 5.4
Тони Чехларова – 4.1, 5.1, 6.2, 7.1
Борислав Лазаров – 6.1, 6.3
Светлозар Дойчев – 5.3, 7.4, 8.2
Ивайло Кортезов – 7.3, 8.3
Сава Гроздев – 6.4, 8.4

Тема за 5 клас

Задача 1. По колко начина една от тежестите върху везната може да се замени с някоя от показаните в редичката вдясно така, че да се постигне равновесие на везната? Обяснете! Стойностите на тежестите върху везната съответстват на показаните.

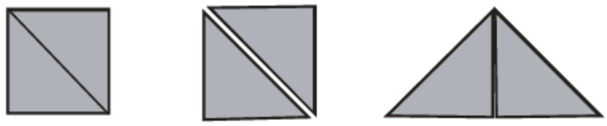


Решение: Дясното блюдо е по-тежко от лявото с 0,5 **(1т.)**. Има 3 възможности за постигане на равновесие с една замяна: ябълката в лявото блюдо да се замени с петоъгълник **(2т.)**; звездата в лявото блюдо да се замени с ябълка **(2т.)**; петоъгълникът в дясното блюдо да се замени с ябълка **(1т.)**.

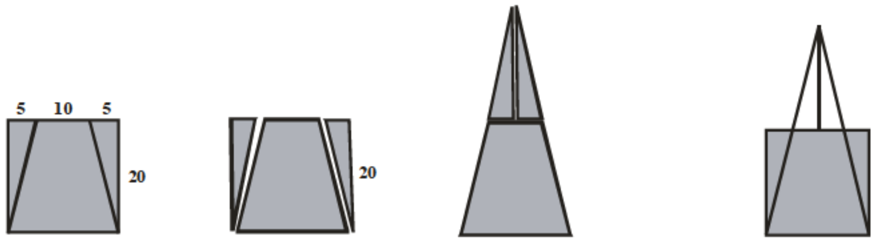
Задача 2. Петър и Петя имат по една салфетка с форма на квадрат с дължина на страната $20\ см$. Петър реже своята салфетка веднъж по права линия от край до край и след разместване на двете парчета получава равнобедрен триъгълник с основа $40\ см$. Петя реже своята салфетка два пъти по права линия от край до край и след разместване

на трите парчета получава равнобедрен триъгълник с височина $40\ см$. Покажете как всеки от тях е разрязал салфетката си и как е разместил получените парчета.

Решение: Петър е разрязал квадрата по един от диагоналите **(2т.)**. Полученият триъгълник е показан по-долу. Двете страни на триъгълника са с равни дължини, следователно той е равнобедрен. Основата му е с дължина $20+20=40\, см$ **(1т.)**.



Разрязването на Петя е показано по-долу **(2т.)**. Полученият триъгълник е равнобедрен и височината му е $20+20=40\, см$ **(1т.)**.



Задача 3. Да се реши числовият ребус $abcd+e.fgh=2008$, в който на буквите a, b, c, d, e, f, g и h отговарят осем различни цифри.

Решение: Ако $a>2$ или $a=2$, то $abcd>2013$ или $abcd=2013$ и даденото равенство е невъзможно. Оттук получаваме, че $a=1$ **(1т.)**. Но тогава произведението $e.fgh$ ще е най-малко $2.304=608$ и понеже $2008-608=1400$, то за цифрата b имаме възможностите $b=0,\ 2,\ 3$. Ако $b=3$, то произведението $e.fgh$ ще бъде по-голямо от 2.400 или от 4.200, т.е. от 800 и значи лявата страна на равенството ще е най-малко $1300+800=2100$. Заключаваме, че в този случай ребусът няма решение. Остава $b=0$ или $b=2$. Ако обаче $b=2$, по същия начин получаваме, че произведението $e.fgh$ ще е по-голямо от 3.400 (или от 4.300) и отново лявата страна на равенството ще надхвърли 2008. Следователно $b=0$ **(1т.)**. Това означава, че разликата $2008-abcd$ ще се намира между $2008-1023=985$ и $2008-1098=910$. Ако някоя от цифрите e или f е по-голяма от 4, то произведението $e.fgh$ ще е по-голямо от 1000 и даденото равенство е невъзможно. Освен това, ако някоя от цифрите e или f е равна на 3, то за да бъде произведението $e.fgh$ между 910 и 985, трябва и другата от двете цифри да е равна на 3, което е невъзможно. Следователно трябва $e=2, f=4$ или $e=4, f=2$ **(1т.)**.

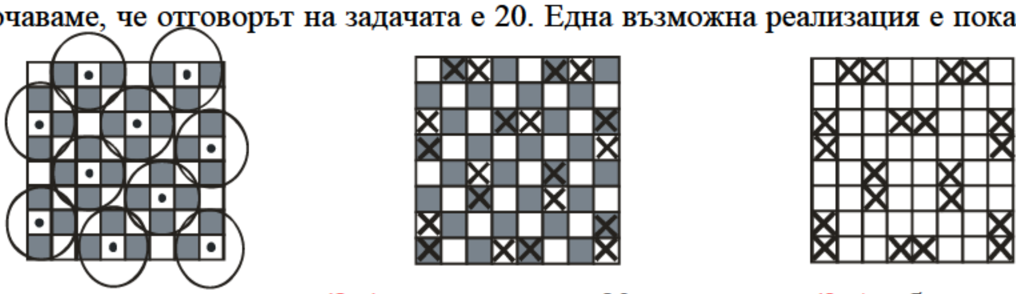
Ако е налице първата възможност, ребусът приема вида $10cd+2.4gh=2008$. Ясно е, че d е четна цифра и понеже 0, 2 и 4 вече са използвани, то $d=6$ или $d=8$. Ако $d=6$, то произведението $2.4gh$ трябва да завършва на 2, а това е възможно само ако $h=1$ (но вече $a=1$) или $h=6$ (но вече $d=6$). Значи решение не се получава. Ако $d=8$, за цифрата h остава да е 0 (вече използвана цифра) или $h=5$ **(1т.)**. Ребусът приема вида $10c8+2\cdot 4g5=2008$ и за g са налице възможностите 3, 6, 7 или 9. Проверката показва, че единственото решение, което се получава в този случай, е $1078+2.465=2008$ **(1т.)**.

Да разгледаме по същия начин втората възможност $e=4, f=2$. Тогава ребусът ще приеме вида $10cd+4\cdot 2gh=2008$. Ако $g>5$ или $g=5$, то $4.2gh>1000$ или $4.2gh=1000$ и лявата страна на равенството ще надхвърли 2008. Следователно $g=3$, защото всички други цифри, по-малки от 5, са вече използвани. Значи числото $2gh$ е някое от числата 235, 236, 237, 238 или 239 (защото други възможности за цифрата h

нямаме). Проверката показва, че в този случай се получават още две решения на ребуса, а именно $1068+4.235=2008$ **(1т.)** и $1056+4.238=2008$ **(1т.)**. Окончателно, дадения ребус има три решения: $1078+2.465=2008$, $1068+4.235=2008$ и $1056+4.238=2008$.

Задача 4. Квадрат със страна 8 см е разделен на 64 единични квадратчета. Две квадратчета наричаме съседни, ако имат обща страна. В колко квадратчета трябва да се постави знак **X** така, че всяко квадратче да има точно по едно съседно със знак **X**? Дайте пример.

Решение: Да оцветим дъската шахматно и да разделим черните квадратчета на 10 групи, както е показано по-долу. Във всяка от тези групи има по едно бяло квадратче, което е отбелязано с •. От чертежа се вижда, че за да бъде изпълнено условието на задачата за отбелязаните с • квадратчета, трябва във всяка от 10-те групи да отбележим с **X** точно едно черно квадратче. Оттук следва, че отбелязаните с черни квадратчета трябва да са точно 10 (нито повече, нито по-малко). По подобен начин следва, че отбелязаните с **X** бели квадратчета трябва също да са точно 10. Заключаваме, че отговорът на задачата е 20. Една възможна реализация е показана по-долу.



Оценяване: построен пример **(3т.)**; даден отговор 20 квадратчета **(2т.)**; обосновка **(2т.)**