Дванадесети фестивал на младите математици

Созопол, 2023 г.

Първи кръг, Тема за 6 – 7 клас

Р Е Ш Е Н И Я

Задача 1. Във всяка от клетките на таблица с три реда и три колони е записана по една цифра, като измежду записаните цифри няма равни. Пресметнати са следните осем сбора: сбора на числата в трите реда, сбора на числата в трите колони и сбора на числата в двата диагонала. Колко най-много от тези осем сбора могат да се делят на 7?

Решение. Отговор: 7. Да допуснем, че съществува таблица в която всички 8 сбора се делят на 7. Тогава сборът на всички числа в таблицата също се дели на 7. Тъй като сборът на десетте цифри от 0 до 9 е 45, а в таблицата са използвани 9 цифри, то единствено с премахването на цифрата 3, получаваме сбор, който се дели на 7. Следователно използваните цифри са 0, 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8 и 9. Сборът на числата в средния ред, средната колона и двата диагонала се дели на 7. Този сбор е равен на сбора на всички числа в таблицата (който е 42) плюс $3x$, където x е цифрата в средното квадратче. Следователно x се дели на 7. Да забележим, че измежду използваните цифри има само 2, които се делят на 7 – това са 0 и 7. Но ако средната цифра се дели на 7, и една от останалите цифри се дели на 7, ще трябва трета цифра, която се дели на 7, противоречие.

В таблицата

1	0	6
2	5	7
4	9	8

са записани цифрите 0, 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8 и 9, като 7 от дадените сборове се делят на 7.

Критерии за оценяване: за отхвърляне на случая с 8 сбора, които се делят на 7 – 8 точки (за наблюдението, че ако сборът на всички числа се дели на 7, то трябва да се използват всички цифри без 3 – 3 точки; за доказателство, че числото в средната клетка се дели на 7 – 3 точки; за наблюдението, че трябва да има три цифри, които се делят на 7 – 2 точки); за пример за таблица със 7 сбора – 4 точки;

Задача 2. Отбор се състои от 4 акробати. На всеки кръг трима от тях играят, а един почива. На края на състезанието всеки преброил колко пъти е участвал в представление. Получили се 4 последователни естествени числа. Да се намери най-малката възможна стойност на най-голямото от тези числа.

Решение. Отговор: 6. Нека получените числа са $a, a+1, a+2, a+3$. Всеки кръг добавя към броя участия на трима от акробатите по 1, т.е. всеки кръг добавя към общия брой участия 3. Тогава $a+a+1+a+2+a+3=4a+6$ се дели на 3, т.е. a се дели на 3. Най-малката стойност на a е 3. Пример за такова състезание е:

1	2	3	4
x	x	x	
x	x	x	
x	x	x	
x	x		x
x	x		x
x		x	x

Критерии за оценяване: за намиране, че $a+a+1+a+2+a+3=4a+6$ се дели на 3 – 4 точки; за намиране на най-малката възможност 3,4,5,6 – 2 точки; за пример, че такова състезание има – 6 точки.

Задача 3. За естествено число n с $S(n)$ означаваме сбора от цифрите на n. Да се намери най-малкото естествено число a със свойството:

$$2S(a) - S(2a) = 2025$$

Решение. Ако при умножението $2a$ няма пренос, то $S(2a) = 2S(a)$. Ако има пренос на t места, то $S(2a) = 2S(a) - 9t$. Следователно $9t = 2025$, $t = 225$ и значи трябва да имаме 225 преноса. Следователно най-малкото a трябва да има 225 цифри и всяка цифра да е поне 5, за да има пренос. Най-малкото такова число е

$$\underbrace{555\ldots555}_{225}.$$

Критерии за оценяване: за наблюдението, че всеки пренос в умножението $2a$ намалява $S(2a)$ спрямо $2S(a)$ с 9 – 4 точки; за извода, че ако има пренос на t места, то $t = 225$ – 2 точки; за наблюдението, че най-малкото число трябва да има 225 цифри – 3 точки; за наблюдението, че най-малката цифра, при която има пренос е 5 – 2 точки; за намиране на самото число – 1 точка.

Задача 4. За дадено естествено число n нека

$$1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n.$$

са всички делители на n. Ако $d_9 = d_3 + 11$ и $d_3 + 7$ е делител на n, да се намери d_6.

Решение. От $d_9 = d_3 + 11$ следва, че едното от d_9 и d_3 е четно, т.е. n е четно, откъдето $d_2 = 2$.

Ще покажем, че $d_3 = 3$. Ако $d_3 \neq 3$, то е ясно, че n не се дели на 3. Тогава или $d_9 = d_3 + 11$ (ако d_3 дава остатък 1 при деление с 3), или $d_3 + 7$ (ако d_3 дава остатък 2 при деление с 3) се дели на 3. Следователно n се дели на 3, противоречие. Получихме, че $d_3 = 3$ и тогава $d_9 = 14$, като $d_3 + 7 = 10$ е делител на n.

Знаем, че $d_1 = 1, d_2 = 2, d_3 = 3, 5, 6, 7, 10, d_9 = 14$ са делители на n. Ако допуснем, че 4 е делител на n, то и 12 е делител на n, като тогава 14 е поне d_{10}. Следователно 4 не е делител на n и $d_1 = 1, d_2 = 2, d_3 = 3, d_4 = 5, d_5 = 6, d_6 = 7$, т.е. $d_6 = 7$.

Критерии за оценяване: за доказателство, че n е четно число (т.е. $d_2 = 2$) – 3 точки; за доказателство, че n се дели на 3 (т.е. $d_3 = 3$)– 4 точки; за доказателство, че n не се дели на 4 – 3 точки; за намиране на d_6 – 2 точки.

Задача 5. За изпъкнал четириъгълник $ABCD$ с пресечна точка на диагоналите O е дадено, че $S_{ABO} = 21$, $S_{BCO} = 15$ и $S_{ADO} = 14$. Точките M и N върху отсечките OC и OD са такива, че

$$S_{BMC} = S_{NMCD} = S_{AND}.$$

Да се намери S_{OMN}.

Решение. Нека $S_{BMC} = S_{NMCD} = S_{AND} = x$. От равенството $S_{ABO}.S_{CDO} = S_{BCO}.S_{ADO}$ намираме $S_{CDO} = \frac{14.15}{21} = 10$. От равенството $S_{ABO}.S_{MNO} = S_{BMO}.S_{ANO}$ намираме

$$21.(10 - x) = (15 - x)(14 - x) \iff -21x = x^2 - 29x \iff x = 8.$$

Следователно $S_{OMN} = S_{CDO} - S_{NMCD} = 10 - 8 = 2$.

Критерии за оценяване: за намиране на S_{CDO} – 3 точки; за намиране на x – 8 точки; за намиране на S_{OMN} – 1 точка.

Задача 6. За един ход двойката цели числа (a, b) може да бъде заменена с една от двойките:

$$(a + 1, b - 2), (a - 1, b + 2), (a + 2, b - 1), (a - 2, b + 1).$$

Първоначално е дадена двойката $(100, 100)$. Колко двойки (x, y), където $0 < x < 100$ и $0 < y < 100$ могат да бъдат получени след някакъв брой ходове?

Решение. Отговор: $99.33 = 3267$**.** Да забележим, че при заменяне на (a, b) с коя да е от дадените двойки, разликата $a - b$ не се променя по модул 3, т.е. $a - b \pmod 3$ е инвариант. Тъй като започваме от двойката $(100, 100)$, можем да получаваме само двойки, за които $a \equiv b \pmod 3$. Ще покажем, че можем да получим всички такива тройки. Това следва от следните ходове:

$$(a, b) \to (a + 1, b - 2) \to (a - 1, b - 1) \to (a, b - 3),$$

$$(a, b) \to (a - 1, b + 2) \to (a + 1, b + 1) \to (a, b + 3),$$
$$(a, b) \to (a - 2, b + 1) \to (a - 1, b - 1) \to (a - 3, b),$$
$$(a, b) \to (a + 2, b - 1) \to (a + 1, b + 1) \to (a + 3, b).$$

За всяко число a от 1 до 99 има по 33 числа b, за които $a \equiv b \pmod 3$. Следователно броят на двойките (a, b) с исканото свойство е $99.33 = 3267$.

Критерии за оценяване: за намиране на инварианта $a \equiv b \pmod 3$ – 4 точки; за доказателство, че всички такива двойки могат да се получат – 6 точки; за намиране на отговора – 2 точки;.

Задача 7. В малък водоем има някакво количество вода, като в него има извор, от който непрекъснато извира вода. Като пие всеки ден, кон пресушава водата във водоема за 500 дни. По същия начин крава пресушава водоема за 800 дни. Ако за един ден конят изпива 3 литра повече вода от кравата, да се намери количеството вода в езерото.

Решение. Нека водата в езерото е a литра, от извора всеки ден извира количество b литра, конят изпива за един ден x литра, а кравата изпива за един ден y литра. От условието имаме

$$500x = a + 500b \iff x = \frac{a}{500} + b \text{ и } 800y = a + 800b \iff y = \frac{a}{800} + b.$$

След изваждане получаваме:

$$x - y = \frac{a}{500} - \frac{a}{800} = \frac{3a}{4000},$$

откъдето поради $x - y = 3$, получаваме $a = 4000$ литра.

Критерии за оценяване: за всяко от равенствата $500x = a + 500b$ и $800y = a + 800b$ – по 2 точки; за равенството $x - y = \frac{a}{500} - \frac{a}{800}$ – 6 точки; за намиране на отговора – 2 точки.

Задача 8. Фунийка за сладолед има формата на конус с радиус на основата 6 cm и височина 10 cm. Колко най-много топки сладолед с формата на сфера с радиус 3 cm могат да се поставят във фунийката, така, че ако всичкия следолед се разтопи, да не препълни фунийката? За този най-голям брой топки намерете до каква височина ще се запълни фунийката при разтапяне на сладоледа.

Решение. Обемът на конуса е $V = \dfrac{10.6^2\pi}{3} = 120\pi$. Обемът на една топка е $\dfrac{4}{3}.3^3.\pi = 36\pi$. За да не се препълни фунийката от n топки, трябва да е изпълнено неравенството

$$36\pi n \leq 120\pi \iff n \leq 3.$$

Трябва да намерим височината h на сладоледа с обем $3.36\pi = 108\pi$. Ако r е радиусът на сладоледа, то от теоремата на Талес, приложена върху правоъгълния триъгълник с катети 6 и 10 и този с r и h, такива че радиусите им лежат на успоредни прави, получаваме $\frac{6}{10} = \frac{r}{h}$, т.е. $r = \frac{3}{5}h$. Оттук $108\pi = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{3}{25}\pi h^3$, съответно $h^3 = 900$ и $h = \sqrt[3]{900}$ cm.

Критерии за оценяване: за обема на конуса – 2 точки; за обема на трите топки – 2 точки; за $n \leq 3$ – 4 точки; за прилагане на теоремата на Талес върху височините – 2 точки; за окончателен отговор – 2 точки