Дванадесети фестивал на младите математици

Созопол, 2023 г.

Първи кръг, Тема за 6 – 7 клас

Задача 1. Във всяка от клетките на таблица с три реда и три колони е записана по една цифра, като измежду записаните цифри няма равни. Пресметнати са следните осем сбора: сбора на числата в трите реда, сбора на числата в трите колони и сбора на числата в двата диагонала. Колко най-много от тези осем сбора могат да се делят на 7?

Задача 2. Отбор се състои от 4 акробати. На всеки кръг трима от тях играят, а един почива. На края на състезанието всеки преброил колко пъти е участвал в представление. Получили се 4 последователни естествени числа. Да се намери най-малката възможна стойност на най-голямото от тези числа.

Задача 3. За естествено число n с $S(n)$ означаваме сбора от цифрите на n. Да се намери най-малкото естествено число a със свойството:

$$2S(a) - S(2a) = 2025$$

Задача 4. За дадено естествено число n нека

$$1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n.$$

са всички делители на n. Ако $d_9 = d_3 + 11$ и $d_3 + 7$ е делител на n, да се намери d_6.

Задача 5. За изпъкнал четириъгълник $ABCD$ с пресечна точка на диагоналите O е дадено, че $S_{ABO} = 21$, $S_{BCO} = 15$ и $S_{ADO} = 14$. Точките M и N върху отсечките OC и OD са такива, че

$$S_{BMC} = S_{NMCD} = S_{AND}.$$

Да се намери S_{OMN}.

Задача 6. За един ход двойката цели числа (a, b) може да бъде заменена с една от двойките:

$$(a+1, b-2), (a-1, b+2), (a+2, b-1), (a-2, b+1).$$

Първоначално е дадена двойката $(100, 100)$. Колко двойки (x, y), където $0 < x < 100$ и $0 < y < 100$ могат да бъдат получени след някакъв брой ходове?

Задача 7. В малък водоем има някакво количество вода, като в него има извор, от който непрекъснато извира вода. Като пие всеки ден, кон пресушава водата във водоема за 500 дни. По същия начин крава пресушава водоема за 800 дни. Ако за един ден конят изпива 3 литра повече вода от кравата, да се намери количеството вода в езерото.

Задача 8. Фунийка за сладолед има формата на конус с радиус на основата 6 cm и височина 10 cm. Колко най-много топки сладолед с формата на сфера с радиус 3 cm могат да се поставят във фунийката, така, че ако всичкия следолед се разтопи, да не препълни фунийката? За този най-голям брой топки намерете до каква височина ще се запълни фунийката при разтапяне на сладоледа.