Дванадесети фестивал на младите математици
Созопол, 2023 г.
Трети кръг, Тема за 6 – 7 клас

Р Е Ш Е Н И Я

Задача 1. Едно естествено число $a > 1$ се нарича *хубаво*, ако съществува редица от естествени числа, започваща с a и завършваща с 1, като всеки член след първия се получава като разделим предишния член на последната му цифра. Например, 375 е хубаво, защото редицата 375, 75, 15, 3, 1 удовлетворява даденото условие. Да се намери броят на хубавите числа, които са по-малки от 1000.

Решение. За всяко естествено число $n \geq 2$ ще построим всички редици с дължина n, които удовлетворяват условието на задачата. При $n = 2$ редиците са:

$$2,1;\quad 3,1;\quad 4,1;\quad 5,1;\quad 6,1;\quad 7,1;\quad 8,1;\quad 9,1.$$

За да получим редиците при $n = 3$ проверяваме дали можем да добавим едно число в началото на всяка от редиците с дължина 2. Лесно се получава, че за редиците $2,1$; $4,1$; $8,1$ това не може да стане, а за останалите редици получаваме:

$$15,3,1;\quad 25,5,1;\quad 12,6,1;\quad 24,6,1;\quad 36,6,1;\quad 48,6,1;\quad 35,7,1;\quad 45,9,1.$$

По същия начин получаваме редиците при $n = 4$:

$$75,15,3,1;\ 125,25,5,1;\ 72,36,6,1;\ 144,36,6,1;\ 216,36,6,1;\ 288,36,6,1;\ 175,35,7,1;\ 225,45,9,1.$$

За $n = 5$ имаме:

$$375,75,15,3,1;\ 625,125,25,5,1;\ 432,216,36,6,1;\ 864,216,36,6,1;\ 875,175,35,7,1.$$

За $n \geq 6$ няма възможна редица (умножаването на 625, 864 и 875 с 2 или повече води до надхвърляне на 1000, а на 375 и 432 води или до надхвърляне, или до неподходящи числа). Следователно хубавите числа са 29:

$$2,3,4,5,6,7,8,9,12,15,24,25,35,36,45,48,72,75,125,144,175,216,225,288,375,432,625,864,875.$$

Оценяване. Общо 10 т. за примерите: по $\dfrac{10}{29}$ точки за всяко намерено хубаво число и резултатът закръглен в полза на докладчика; 2 т. за обосновка, че няма възможни редици с $n \geq 6$.

Задача 2. Намерете всички четирицифрени естествени числа $\overline{abcd}$ $(a \neq 0)$, такива че

$$\overline{abcd} = (a+b+c+d)(a^2+b^2+c^2+d^2)^2.$$

Решение. Отговор. 2023, 2400 Нека $L = \overline{abcd}$ и $R = (a+b+c+d)(a^2+b^2+c^2+d^2)^2$. Започвайки от стойността на a, разбиваме на случаи.

- Ако $a \geq 7$, то $R \geq 49^2 \cdot 7 > 10000$; ако $a = 6$, то $R \geq 36^2 \cdot 6 > 7000$, невъзможно.

- Нека $a = 5$. Тогава $5000 \le L < 6000$. Ако $b + c + d \ge 5$, то $R \ge 10 \cdot 25^2 > 6000$ и ако поне едно от b, c, d е 3 или повече, то $R \ge 8 \cdot 34^2 > 6000$. Значи $L < 5300$ и никое от b, c, d не е 2, иначе $R \ge 7 \cdot 29^2 > 5300$. Не можем да имаме $b = c = d$ (L и R биха имали различна четност), а ако две от b, c, d са 1 и другото е 0, то $R = 27^2 \cdot 7 = 5103$, а ако едно от b, c, d е 1 и другите са 0, то $R = 6 \cdot 26^2 < 5000$. Така нямаме решения в този случай.

- Нека $a = 4$. Тогава $4000 \le L < 5000$. Никое от b, c, d не е 4 или повече, иначе $R \ge 8 \cdot (4^2 + 4^2)^2 > 5000$, а ако поне едно от тях е 3, то или $\{a, b, c, d\} = \{4, 3, 0, 0\}$ (не работи) или $R \ge 8 \cdot (4^2 + 3^2 + 1^2)^2 > 5000$. Значи $b, c, d \le 2$ и ако най-много едно от тях е 2, то получаваме $R \le 8 \cdot 22^2 < 4000$. Остава да проверим, че никое от $\{a, b, c, d\} = \{4, 2, 2, 2\}$, $\{4, 2, 2, 1\}$, $\{4, 2, 2, 0\}$ не работи.

- Нека $a = 3$. Тогава $3000 \le L < 4000$. Никое от b, c, d не е 4 или повече, иначе $R \ge 7 \cdot (3^2 + 4^2)^2 > 4000$. Така $b, c, d \le 3$ и $L < 3400$. Ако две или три от тези са 3, то $R \ge 9 \cdot 27^2 > 4000$, а ако никое не е 3, то $\{a, b, c, d\} = \{3, 2, 2, 2\}$ (не работи) или $R \le 9 \cdot 18^2 < 3000$. Значи точно едно от b, c, d е 3 и проверяваме, че $\{3, 3, 2, 2\}$, $\{3, 3, 2, 1\}$, $\{3, 3, 2, 0\}$, $\{3, 3, 1, 1\}$, $\{3, 3, 1, 0\}$ и $\{3, 3, 0, 0\}$ не работят.

- Нека $a = 2$. Тогава $2000 \le L < 3000$. Ако поне едно от b, c, d е 4 или повече, то $\{a, b, c, d\} = \{2, 4, 0, 0\}$, което дава решението $\overline{abcd} = 2400$ или $R \ge 7 \cdot (2^2 + 4^2 + 1^2)^2 > 3000$. Нека $b, c, d \le 3$. Ако две или три от тези са 3, то $R \ge 8 \cdot (2^2 + 3^2 + 3^2)^2 > 3000$, а ако никое не е 3, то или $a = b = c = d = 2$ (не работи), или $R \le 7 \cdot 13^2 < 2000$. Значи точно едно от тези е 3 и проверка показва, че $\{2, 3, 2, 2\}$, $\{2, 3, 2, 1\}$, $\{2, 3, 1, 1\}$, $\{2, 3, 1, 0\}$ и $\{2, 3, 0, 0\}$ не работят, докато $\{2, 0, 2, 3\}$ води до решението $\overline{abcd} = 2023$.

- Нека $a = 1$. Тогава $1000 \le L < 2000$. Значи никое от b, c, d не е 5 или повече, в противен случай $R \ge 6 \cdot 26^2 > 2000$, а ако поне две от тях са 3 или повече, то $R \ge 7 \cdot 19^2 > 2000$. Така $b, c, d \le 4$, но ако поне едно е 4, то $L < 1500$ докато $R \ge 6 \cdot 17^2 > 1500$ освен ако $\{a, b, c, d\} = \{1, 4, 0, 0\}$, което не работи. Следователно $b, c, d \le 3$ и най-много едно от тези е 3. Ако всички не надминават 2, то $\{a, b, c, d\} = \{1, 2, 2, 2\}$ (не работи) или $R \le 6 \cdot 10^2 < 1000$. Значи точно едно от тях е 3 и $L < 1400$ – тогава ако някое друго е 2, то $\{a, b, c, d\} = \{1, 3, 2, 0\}$ (не работи) или $R \ge 7 \cdot 15^2 > 1400$. Остава да проверим, че $\{a, b, c, d\} = \{1, 3, 1, 1\}$, $\{1, 3, 1, 0\}$, $\{1, 3, 0, 0\}$ също не работят.

Окончателно решенията са $\overline{abcd} = 2023$, 2400.

Оценяване. по 1 т. за всеки от двата отговора, 1 т. за $a \ge 7$, 1 т. за $a = 5$, по 2 т. за всяко от $a = 1, 2, 3, 4$

Задача 3. Естествено число n се нарича *прекрасно* ако всички естествени числа от 1 до 1000 могат да се разделят на двойки, като във всяка двойка модула на разликата на числата е равен на n. Да се намерят всички прекрасни числа.

Решение. Ясно е, че 1 може да бъде в двойка само с $n + 1$. След това 2 може да бъде в двойка само с $n + 2$ и т.н. n може да бъде в двойка само с $2n$. Следователно за първите $2n$ има единствен начин да бъдат разделени на двойки с разлика n. Аналогично следващите $2n$ числа също се разделят по единствен начин на двойки с разлика n и т.н.

Следователно $2n$ трябва да дели 1000, т.е. n дели 500. Това означава, че прекрасните числа са всички делители на 500:

$$1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100, 125, 250, 500$$

Оценяване. 6 точки за наблюдението, че числата трябва да се групират по $2n$; 3 точки за наблюдението, че n дели 500; 3 точки за намиране на всички делители на 500.

Задача 4. а) Съществуват ли четири различни точки в равнината A_1, A_2, A_3, A_4 и четири положителни рационални числа q_1, q_2, q_3, q_4, такива че $S_{A_1A_2A_3} = q_1 + q_2 + q_3$, $S_{A_1A_2A_4} = q_1 + q_2 + q_4$, $S_{A_1A_3A_4} = q_1 + q_3 + q_4$ и $S_{A_2A_3A_4} = q_2 + q_3 + q_4$?

б) Съществуват ли пет различни точки в равнината A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 и пет положителни рационални числа q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, такива че $S_{A_1A_2A_3} = q_1 + q_2 + q_3$, $S_{A_1A_2A_4} = q_1 + q_2 + q_4$, $S_{A_1A_2A_5} = q_1 + q_2 + q_5$, $S_{A_1A_3A_4} = q_1 + q_3 + q_4$, $S_{A_1A_3A_5} = q_1 + q_3 + q_5$, $S_{A_1A_4A_5} = q_1 + q_4 + q_5$, $S_{A_2A_3A_4} = q_2 + q_3 + q_4$, $S_{A_2A_3A_5} = q_2 + q_3 + q_5$, $S_{A_2A_4A_5} = q_2 + q_4 + q_5$ и $S_{A_3A_4A_5} = q_3 + q_4 + q_5$?

Решение. а) Да! Избираме квадрат $A_1A_2A_3A_4$ със страна 1 и $r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = \frac{1}{6}$.

б) Не! Да допуснем противното. Ще използваме, че ако $A_1A_2A_3A_4$ е изпъкнал четириъгълник, то $q_1 + q_3 = q_2 + q_4$, а ако A_4 е вътрешна (или по периметъра) за триъгълника $A_1A_2A_3$, то $q_4 = -\frac{q_1+q_2+q_3}{3}$.

Нека първо $A_1A_2A_3A_4A_5$ е изпъкнал петоъгълник. Тогава $q_1 + q_3 = q_2 + q_4 = q_3 + q_5 = q_4 + q_1 = q_5 + q_2$, откъдето $q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = q_5$. В частност, $S_{A_1A_2A_3} = S_{A_1A_2A_4} = S_{A_1A_2A_5}$, а от изпъкналостта следва, че A_3, A_4 и A_5 са в една и съща полуравнина спрямо A_1A_2 – значи A_3, A_4 и A_5 лежат на една права (успоредна на A_1A_2) и $S_{A_3A_4A_5} = 0$, откъдето $q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = q_5 = 0$, противоречие.

Нека сега $A_1A_2A_3A_4$ е изпъкнал четириъгълник и A_5 е вътрешна за него, като без ограничение A_5 е вътрешна (или по периметъра) за $A_1A_2A_3$ и $A_1A_2A_4$. Тогава $q_5 = -\frac{q_1+q_2+q_3}{3} = -\frac{q_1+q_2+q_4}{3}$, откъдето $q_3 = q_4$, което води до $S_{A_1A_2A_3} = S_{A_1A_2A_4}$, а значи и до $A_1A_2 \parallel A_3A_4$. Оттук $S_{A_1A_3A_4} = S_{A_2A_3A_4}$ и $q_1 = q_2$. От друга страна, $q_5 + q_3 = q_2 + q_4 = q_2 + q_3$, т.е. $q_1 = q_2 = q_5$ и значи $S_{A_3A_4A_1} = S_{A_3A_4A_2} = S_{A_3A_4A_5}$ и тъй като A_1, A_2 и A_5 са в една полуравнина спрямо A_3A_4, те трябва да лежат на една права, което води до $q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = q_5 = 0$, невъзможно.

Остава да разгледаме случая, в който A_4 и A_5 са вътрешни за триъгълника $A_1A_2A_3$. Тогава $q_4 = q_5 = -\frac{q_1+q_2+q_3}{3}$, откъдето $S_{A_1A_2A_4} = S_{A_1A_2A_5}$ и $S_{A_1A_3A_4} = S_{A_1A_3A_5}$. Така $A_1A_2 \parallel A_4A_5 \parallel A_1A_3$, значи A_1, A_2 и A_3 лежат на една права, което води до $q_1 = q_2 = q_3 = 0$ и оттук $q_4 = q_5 = 0$, противоречие.

Оценяване. 3 т. за а), по 3 т. за всеки от трите случая в б).

Задача 5. Даден е четириъгълник $ABCD$ с лице 1. На страната AB са взети точки M и N, а на страната CD – точки P и Q така, че $AM = \dfrac{1}{3} \cdot AB$, $BN = \dfrac{1}{4} \cdot AB$, $CP = \dfrac{1}{3} \cdot CD$ и $DQ = \dfrac{1}{4} \cdot CD$. Ако E е средата на отсечката MQ и F е средата на NP, да се намери сборът на лицата на триъгълниците ADE и BCF.

Решение. Имаме

$$S_{AED} = \frac{1}{2} \cdot (S_{ADM} + S_{ADQ}) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot S_{ABD} + \frac{1}{4} \cdot S_{ADC}\right) = \frac{1}{6} \cdot S_{ABD} + \frac{1}{8} \cdot S_{ADC}.$$

Аналогично

$$S_{BCF} = \frac{1}{6} \cdot S_{BCD} + \frac{1}{8} \cdot S_{ABC}.$$

Намираме

$$S_{AED} + S_{BCF} = \frac{1}{6}(S_{ABD} + S_{BCD}) + \frac{1}{8}(S_{ADC} + S_{ABC}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{8} = \frac{7}{24}.$$

Оценяване. По 5 точки за S_{AED} и S_{BCF} и 2 точки за довършване на решението.

Задача 6. В киносалон има 100 реда, като на всеки ред има поне 110 места. Да се намери най-малкото естествено число n със следното свойство:

Ако n ученици гледат два филма, то винаги има двама ученици, които са били на един ред при първия филм и на един ред (не задължително същия) и при втория филм.

Решение. Нека $n = 100^2$ и да наредим учениците в квадрат 100×100. За първия филм да изберем учениците на ред i да са учениците от i-ия ред на таблицата, а при втория филм учениците на ред i да са учениците от i-та колона на таблицата. Тогава няма двама ученици, които са били на един и същи ред при двата филма. Ако $n > 100^2$, то при първия филм ще има ред, на който ще има повече от 100 ученици. При втория филм повече от 100 ученици трябва да седнат на 100 реда и от принципа на Дирихле, следва, че има двама един ред. Следователно търсеното най-малко n е 10001.
Оценяване. 6 точки за пример с $n = 100^2$; 6 точки за оценката $\leq 100^2 + 1$.

Задача 7. В редица са записани 2023 цифри, всяка от които е 1, 2 или 3. Известно е, че между всеки две единици има поне една двойка, а между всеки две двойки има поне една тройка. Ако броят на единиците е поне колкото броя на двойките, а броя на двойките е поне колкото броя на тройките, да се намери колко са двойките в редицата.

Решение. Отговор: 674 Да означим с a, b и c съответно броя на единиците, двойките и тройките в редицата. Тъй като между всеки две съседни единици има поне една двойка, то $b \geq a - 1$ и аналогично $c \geq b - 1$. Сега от $a \geq b \geq c$ получаваме $b = a$ или $b = a - 1$ и $c = b$ или $c = b - 1$. Следователно са възможни 4 случая:

- $b = a$ и $c = b$ – тогава $a + b + c = 3a = 2023$, което е невъзможно;
- $b = a$ и $c = b - 1$ – тогава $a + b + c = 3a - 1 = 2023$, което е невъзможно;
- $b = a - 1$ и $c = b$ – тогава $a + b + c = 3a - 2 = 2023$, откъдето $a = 675$;
- $b = a - 1$ и $c = b - 1$ – тогава $a + b + c = 3a - 3 = 2023$, което е невъзможно;

Получаваме, че има само една възможност $a = 675$ и $b = c = 674$.
Оценяване. 4 точки за $b = a$ или $b = a - 1$ и $c = b$ или $c = b - 1$; по 2 точки за всеки от четирите случая.

Задача 8. Планинският цар имал купчина скъпоценни камъни, рубини и сапфири. За тяхното съхранение той поръчал сандъци, на брой между 3000 и 4000.

Един ден той сложил във всеки сандък или 35 рубина, или 53 сапфира, но един рубин останал (празни сандъци не останали).

На следващия ден царят изпразнил сандъците и сложил във всеки сандък или 43 рубина, или 34 сапфира, но един сапфир останал (празни сандъци не останали).

Колко сандъка е поръчал царят?

Решение. Нека първия ден царят е сложил в a сандъка по 35 рубина и в b сандъка по 53 сапфира, а на втория ден е сложил в c сандъка по 43 рубина и в d сандъка по 34 сапфира. Тогава броят на сандъците е

$$a + b = c + d,$$

броят на рубините е

$$35a + 1 = 43c,$$

а броят на сапфирите е

$$53b = 34d + 1.$$

От $35a + 1 = 43c$ следва, че

$$a = 43k + 27, \quad c = 35k + 22,$$

където k е естествено число, а от $53b = 34d + 1$ следва, че

$$b = 34l + 9, \quad d = 53l + 14,$$

където l е естествено число. От $a + b = c + d$ получаваме

$$8k = 19l \iff k = 19p, \quad l = 8p,$$

където p е естествено число. Така

$$a = 817p + 27, \quad b = 272p + 9, \quad c = 665p + 22, \quad d = 424p + 14.$$

Броят на сандъците е $1089p + 36$ и е между 3000 и 4000 само при $p = 3$; тогава получаваме 3303 сандъка. (Всъщност, получават се 86 731 рубина и 43 725 сапфира.)

Оценяване. 2 за въвеждане на a, b, c и d и равенството между тях; по 2 точки за изразяване на броя на рубините и сапфирите с a, b, c и d; 4 точки за изразяване на a, b, c и d с един параметър; 2 точки за получаване на отговора.