Дванадесети фестивал на младите математици

Созопол, 2023 г.

Трети кръг, Тема за 6 – 7 клас

Задача 1. Едно естествено число $a > 1$ се нарича *хубаво*, ако съществува редица от естествени числа, започваща с a и завършваща с 1, като всеки член след първия се получава като разделим предишния член на последната му цифра. Например, 375 е хубаво, защото редицата 375, 75, 15, 3, 1 удовлетворява даденото условие. Да се намери броят на хубавите числа, които са по-малки от 1000.

Задача 2. Намерете всички четирицифрени естествени числа $\overline{abcd}$ ($a \neq 0$), такива че

$$\overline{abcd} = (a + b + c + d)(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2.$$

Задача 3. Естествено число n се нарича *прекрасно*, ако всички естествени числа от 1 до 1000 могат да се разделят на двойки, като във всяка двойка модула на разликата на числата е равен на n. Да се намерят всички прекрасни числа.

Задача 4. а) Съществуват ли четири различни точки в равнината A_1, A_2, A_3, A_4 и четири положителни рационални числа q_1, q_2, q_3, q_4, такива че $S_{A_1A_2A_3} = q_1 + q_2 + q_3$, $S_{A_1A_2A_4} = q_1 + q_2 + q_4$, $S_{A_1A_3A_4} = q_1 + q_3 + q_4$ и $S_{A_2A_3A_4} = q_2 + q_3 + q_4$?

б) Съществуват ли пет различни точки в равнината A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 и пет положителни рационални числа q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, такива че $S_{A_1A_2A_3} = q_1 + q_2 + q_3$, $S_{A_1A_2A_4} = q_1 + q_2 + q_4$, $S_{A_1A_2A_5} = q_1 + q_2 + q_5$, $S_{A_1A_3A_4} = q_1 + q_3 + q_4$, $S_{A_1A_3A_5} = q_1 + q_3 + q_5$, $S_{A_1A_4A_5} = q_1 + q_4 + q_5$, $S_{A_2A_3A_4} = q_2 + q_3 + q_4$, $S_{A_2A_3A_5} = q_2 + q_3 + q_5$, $S_{A_2A_4A_5} = q_2 + q_4 + q_5$ и $S_{A_3A_4A_5} = q_3 + q_4 + q_5$?

Задача 5. Даден е четириъгълник $ABCD$ с лице 1. На страната AB са взети точки M и N, а на страната CD – точки P и Q така, че $AM = \dfrac{1}{3} \cdot AB$, $BN = \dfrac{1}{4} \cdot AB$, $CP = \dfrac{1}{3} \cdot CD$ и $DQ = \dfrac{1}{4} \cdot CD$. Ако E е средата на отсечката MQ и F е средата на NP, да се намери сборът на лицата на триъгълниците ADE и BCF.

Задача 6. В киносалон има 100 реда, като на всеки ред има поне 110 места. Да се намери най-малкото естествено число n със следното свойство:

Ако n ученици гледат два филма, то винаги има двама ученици, които са били на един ред при първия филм и на един ред (не задължително същия) и при втория филм.

Задача 7. В редица са записани 2023 цифри, всяка от които е 1, 2 или 3. Известно е, че между всеки две единици има поне една двойка, а между всеки две двойки има поне една тройка. Ако броят на единиците е поне колкото броя на двойките, а броят на двойките е поне колкото броя на тройките, да се намери колко са двойките в редицата.

Задача 8. Планинският цар имал купчина скъпоценни камъни, рубини и сапфири. За тяхното съхранение той поръчал сандъци, на брой между 3000 и 4000. Един ден той сложил във всеки сандък или 35 рубина, или 53 сапфира, но един рубин останал (празни сандъци не останали). На следващия ден царят изпразнил сандъците и сложил във всеки сандък или 43 рубина, или 34 сапфира, но един сапфир останал (празни сандъци не останали). Колко сандъка е поръчал царят?