МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
СЪЮЗ НА МАТЕМАТИЦИТЕ В БЪЛГАРИЯ

ЗИМНИ МАТЕМАТИЧЕСКИ СЪСТЕЗАНИЯ

П Л Е В Е Н

1 – 3 февруари 2008 г.,

Задачите и темите са обсъдени от членовете на Националната комисия по математика 4 – 8 клас в състав:

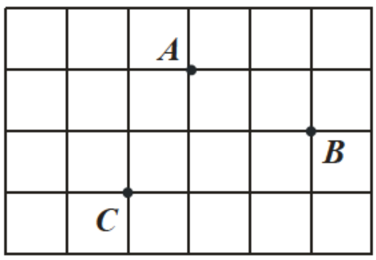
проф. Сава Гроздев – председател
Емил Карлов и гл. ас. Иван Ангелов – отговорници за 4 клас
ст.н.с. Тони Чехларова и докторант Ирина Шаркова – отговорници за 5 клас
ст.н.с. Борислав Лазаров и ас. Симеон Замковой – отговорници за 6 клас
докторант Светлозар Дойчев – отговорник за 7 клас
ст.н.с. Ивайло Кортезов – отговорник за 8 клас

Автори на задачите са:

Емил Карлов – 4.2, 4.3, 4.4, 5.2, 7.2, 8.1
Иван Ангелов – 5.4
Тони Чехларова – 4.1, 5.1, 6.2, 7.1
Борислав Лазаров – 6.1, 6.3
Светлозар Дойчев – 5.3, 7.4, 8.2
Ивайло Кортезов – 7.3, 8.3
Сава Гроздев – 6.4, 8.4

Тема за 6 клас

Задача 1. В квадратна мрежа са дадени точките *A, B* и *C*:

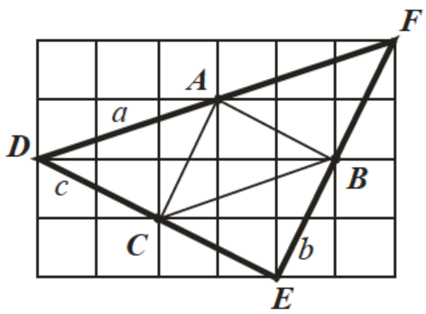


а) Отбележете всички точки *X*, за които четириъгълникът с върхове точките *A, B, C* и *X* (взети в някакъв ред) е успоредник.

б) Намерете лицето на многоъгълника, чиито върхове са точките от а).

Обосновете резултатите си!

Решение: а) Има три такива точки – на чертежа това са точките *D, E* и *F*.



Наистина, ако AB е страна на успоредник и C е негов връх, четвъртият връх на успоредника лежи на правата c през C, успоредна на AB. Аналогично разсъждаваме и за случаите, когато страна е AC или BC – тогава имаме съответно правите b и a. За всяка открита точка **(1 т.)**.

б) От лицето на правоъгълника 6×4 вадим лицата на правоъгълните триъгълници, допълващи DEF до този правоъгълник: $S_{DEF} = 24-4-4-6=10$ кв. ед. **(3 т.)**

Задача 2. Решете ребуса $a^b\left(c^b.a+1\right)=2008$, където a, b и c са естествени числа.

Решение: Разлагането на 2008 на прости множители е $2008=2^3.251$. Възможните произведения от два множителя са $1.2008=2.1004=2^2.502=2\ .251$. Не е възможно първият множител в лявата страна на ребуса да е от вида $251k$, защото 251 е просто число и тогава следва, че $a=251$ и $b=1$, при което лявата страна става по-голяма от 2008 **(1 т.)**.

При $2008=2^3.251$ получаваме $2\ \left(c^3.2+1\right)=2008$ или $8\ \left(c^1.8+1\right)=2008$. В първия случай $c=5$ и решението е $2^3\left(5\ .2+1\right)=2008$, т.е. $a=2$, $b=3$, $c=5$ **(2 т.)**. Във втория случай не се получава решение.

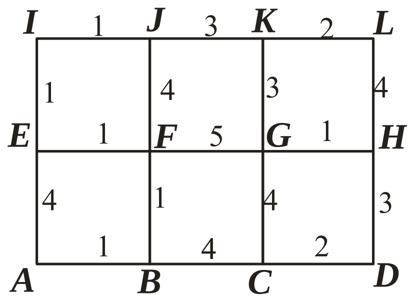
При $2008=1.2008$ получаваме $1.\left(c^b.1+1\right)=2008$, т.е. $c^b=2007$. Сега решението е $1^1\left(2007\ .1+1\right)=2008$ т.е. $a=1$, $b=1$, $c=2007$ **(1 т.)**. (Обърнете внимание, че в условието не е поставено изискване a, b и c да са различни естествените числа.)

При $2008=2.1004$ от $2\ \left(c^1.2+1\right)=2008$ не се получава решение **(1 т.)**.

При $2008=2^2.502$ са възможни случаите $2\ \left(c^2.2+1\right)=2008$ или $4^1\left(c\ .4+1\right)=2008$, от които също не се получава решение **(1 т.)**.

Окончателно решенията са $2^3\left(5\ .2+1\right)=2008$ (т.е. $a=2$, $b=3$, $c=5$) и $1^1\left(2007\ .1+1\right)=2008$ (т.е. $a=1$, $b=1$, $c=2007$).

Задача 3. След приватизация на уличната мрежа в Горубляне сити улично-разпределителното дружество поставило такси (в лева) за преминаване по улиците, както е показано на схемата:



а) По колко различни най-къси маршрута може да се отиде от A до L?

б) Определете маршрута от A до L с най-малка обща такса?

Обосновете резултатите си!

Решение: а) **Отговор**: 10. Най-къси са маршрутите, при които движението е отляво надясно (такъв ход ще означаваме с 1) или отдолу нагоре (такъв ход ще означаваме с 0). Всеки маршрут съответства на поредица от три единици и две нули. Различните начини да се напишат две нули на пет места са 10 **(2 т.)**.

б) Това е маршрутът *ABFEIJKL*. Във всяко кръстовище пишем най-ниската цена, която може да се заплати, за да се достигне то от *A*. Попълването на цените правим последователно от *A* към *L*: *B*(1), *E*(3), *F*(2), *C*(5), *I*(4), *J*(5), *D*(7), *G*(7), *K*(8), *H*(8), *L*(10).

Някои обосновки **(4 т.)**:

- Стойността на един маршрут е по-голяма или равна на броя на улиците, от които е съставен.
- Стойностите на *B* и *F* са очевидни.
- Маршрутите от *A* до *E* са от 1 улица, от 3 улици или от повече улици. *ABFE* е по-евтин от *AE*, а останалите маршрути са не по-евтини от 4, понеже съдържат поне 4 улици.
- По същия начин разсъждаваме за *C*.
- Маршрутите от *A* до *J* са от 3 улици, от 5 улици или от повече улици. *ABFEIJ* е по-евтин от *AEIJ* и от *ABFJ*, а останалите маршрути са не по-евтини от 6, понеже съдържат поне 5 улици, най-малко една от които е "по-скъпа" от 1.

Пълно решение на б) **(5 т.)**.

Задача 4. Едно 8-цифрено естествено число се нарича "четирицифрен дубъл", ако в записа му всяка цифра от 1 до 4 участва точно по два пъти и между двете единици има 1 цифра, между двете двойки има 2 цифри, между двете тройки има 3 цифри, а между двете четворки има 4 цифри. Едно 10-цифрено естествено число се нарича "петцифрен дубъл", ако в записа му всяка цифра от 1 до 5 участва точно по два пъти и между двете единици има 1 цифра, между двете двойки има 2 цифри, между двете тройки има 3 цифри, между двете четворки има 4 цифри, а между двете петици има 5 цифри. Да се намерят:

а) всички четирицифрени дубъли;

б) всички петцифрени дубъли.

Решение: а) Да допуснем, че съществува четирицифрен дубъл и да разгледаме двете цифри между двете му двойки. Очевидно тези цифри трябва да са различни. Ако единицата е едната от тях, то единствените възможности за нейното разположение са $121x2$ и $2x121$. Ако втората цифра между двете двойки е 3, получаваме 312132 или 231213 и двете четворки няма как да бъдат разположени. Следователно втората цифра между двете двойки трябва да е 4. Сега единствените възможности са 4312142 и 2412134, като този път става невъзможно разполагането на втората тройка. Така заключаваме, че между двете двойки не може да има единица **(1 т.)**. Със сигурност двете цифри между двойките са 3 и 4. Имаме 2342 или 2432. И в двата случая ако има цифра преди първата двойка, тя със сигурност трябва да е единица, т.е. 12342 или 12432. В първия случай вляво от единицата не може да има нито тройка, нито четворка и следователно той не води до резултат **(1 т.)**. За втория случай единствената възможност е 41312432, което е решение на задачата. Нека сега единицата е след втората двойка, т.е. 23421 или 24321. В първия случай единствената възможност е 23421314, което е още едно решение, а вторият не води до резултат **(1 т.)**. Следователно задачата има 2 (огледални) решения: 41312432 и 23421314 **(1 т.)**.

б) Да допуснем, че съществува петцифрен дубъл и да разгледаме цифрите между двете му петици. Понеже те са 5 на брой, между тях не могат да са двете четворки. Следователно извън петиците има 3 цифри и поне едната от тях е четворка. Тя е само една, защото не е възможно да има две четворки едновременно вляво или вдясно на числото 5*xxxxx*5. Поради симетрията заключаваме, че са възможни само 3 случая: 4*xx*5*xxxxx*5, 4*x*5*xxxxx*5 и 45*xxxxx*5. За всеки един от тях разположението на втората четворка е еднозначно: 4*xx*5*x*4*xxx*5, 4*x*5*xx*4*xx*5 или 45*xxx*4*x*5. По-нататък се интересуваме от разположението на единиците. Имаме следните възможности: 4*x*1514*xxx*5, 4*xx*5141*xx*5, 4*xx*5*x*41*x*15, 1415*xx*4*xx*5, 4151*x*4*xx*5, 4*x*5*x*141*x*5, 4*x*5*xx*4*x*151, 451*x*14*x*5, 45*xx*1415 и 45*xxx*4151. Във всички тях, освен четвъртата и шестата, е невъзможно разполагането на тройките. За четвъртата и шестата получаваме съответно 14153*x*4*x*35 и 4*x*5314135, но сега пък е невъзможно разполагането на двойките и единиците. Така заключаваме, че не съществува петцифрен дубъл. **(по 1 т. за изчерпателно разглеждане на всеки от случаите 4*xx*5*x*4*xxx*5, 4*x*5*xx*4*xx*5, 45*xxx*4*x*5).**