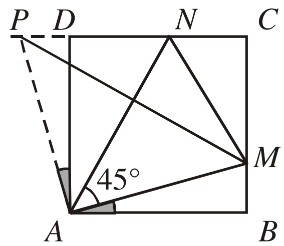
УСЛОВИЯ И КРАТКИ РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ

7. КЛАС

7.1. В 9 часа от пристанище *A* към пристанище *B*, срещу течението на река, което има скорост 3 км/ч, тръгнала моторна лодка. Два часа и двадесет минути след тръгването двигателят на лодката спрял поради повреда и на екипажа били необходими 1 час и 20 минути, за да приведе отново лодката в движение. След повредата двигателят загубил част от мощността си и собствената скорост на лодката се намалила с 25%. Лодката пристигнала в *B* 2 часа и 48 минути след възобновяване на движението. Да се намери собствената скорост на лодката в спокойна вода преди повредата и разстоянието между *A* и *B*, ако разстоянието изминато преди повредата е със 7 км повече от разстоянието, изминато след отстраняването на повредата.

Решение. Нека собствената скорост на лодката преди повредата е x км/ч. Тогава скоростта и срещу течението е $x-3$ км/ч. Изминатото до повредата разстояние е $\frac{7}{3}\left(x-3\right)$ км. (**2 т.**). След повредата собствената скорост на лодката вече е $\frac{3}{4}x$ км/ч, скоростта срещу течението е $\frac{3}{4}x-3$ км/ч, а изминатото разстояние е $\frac{14}{5}\left(\frac{3}{4}x-3\right)$км. (**2 т.**) Така получаваме уравнението $\frac{7}{3}\left(x-3\right)-7=\frac{14}{5}\left(\frac{3}{4}x-3\right)$ (**1 т.**), чието решение е $x=24$ км/ч (**1 т.**). До повредата лодката изминала $\frac{7}{3}.21=49$ км (**1 т.**), а след отстраняването ѝ $\frac{14}{5}\left(\frac{3}{4}.24-3\right)=42$ км (**1 т.**), но докато се отстранява повредата течението връща лодката 4 км назад (**1 т.**). Следователно разстоянието от *A* до *B* е $49+42-4=87$ км (**1 т.**).

7.2. Даден е квадрат *ABCD* със страна *a*. Точките *M* и *N* лежат съответно върху страните *BC* и *CD* и са такива, че $\angle MAN=45^\circ$. Да се намери периметърът на триъгълника *MNC*.



Решение. Нека $AP\perp AM$ ($P\in CD$) (**2 т.**). Понеже $\angle BAD=\angle MAP$, то $\angle BAM=90^\circ-\angle MAD=\angle MAN$ (**2 т.**). Освен това $AB=AD$ и $\angle ABM=\angle ADP$. Следователно $\Delta ABM\cong\Delta ADP$ (**2 т.**), откъдето следва, че $AM=AP$ и $BM=DP$ (**1 т.**). От $\angle PAN=90^\circ-\angle MAN=45^\circ$ намираме, че *AN* е ъглополовяща в равнобедрения триъгълник *AMP*, откъдето получаваме, че *AN* е симетрала на *MP*. (**1 т.**) Следователно $PN=MN$. От $PN=PD+DN=BM+DN$ намираме $MN=BM+DN$. За периметъра на триъгълника *MNC* получаваме $P_{MCN}=MC+CN+NM=MC+CN+DN+BM=BC+CD=2a$, или $P_{MNC}=2a$. (**2 т.**)

7.3. Да се намери най-малкото естествено число k за което уравнението

$$x_1^2 + x_2^2 + ... + x_k^2 = 2007$$

има решение в множеството на естествените числа.

Решение. Очевидно $k > 1$, защото числото 2007 не е точен квадрат. **(1 т.)** Ако $k = 2$ от $x_1^2 + x_2^2 = 2007$ следва, че едното от числата x_1 и x_2 е четно, а другото е нечетно. Но квадратите на четните числа се делят на 4, а квадратите на нечетните числа дават остатък 1 при деление с 4. Понеже при деление с 4 числото 2007 дава остатък 3, виждаме, че k не е 2. **(2 т.)**. Нека $k = 3$. Тогава или трите числа са нечетни, или едното е нечетно, а другите две – четни. Ако е налице първият случай, то всеки от квадратите на тези числа дава остатък 1 при деление с 8 и сборът на тези остатъци е 3, а числото 2007 дава остатък 7 при деление с 8. **(2т.)** Ако е налице вторият случай както при $k = 2$ ще имаме в ляво остатък 1 при деление с 4, а вдясно – съответно остатък 3 при деление с 4. **(2 т.)** Нека $k = 4$. Понеже 2007 = 9.223, достатъчно е да представим числото 223 като сбор от квадратите на четири естествени числа. **(1 т.)** Имаме $223 = 11^2 + 10^2 + 1^2 + 1^2$ **(1т.)**, откъдето 2007 = $33^2 + 30^2 + 3^2 + 3^2$, (Може и 2007=$42^2 + 13^2 + 7^2 + 5^2$). **(1 т.)** Търсеното най-малко естествено число е $k = 4$.

7.4. Множеството Е се състои от 37 двуцифрени числа, нито едно от които не се дели на 10. Да се докаже, че в Е могат да се намерят 5 числа такива, че за всеки две от тях цифрите на десетиците са различни и цифрите на единиците са различни.

Решение. Разделяме числата от множеството *E* на 9 групи, като във всяка група поставяме числата с една и съща цифра на десетиците. Според принципа на Дирихле в някоя от тези групи ще имаме поне 5 елемента (В противен случай числата ще са най-много 4.9 = 36). Следователно в множеството *E* има поне 5 числа с една и съща цифра на десетиците – да кажем a. **(2 т.)** Разглеждаме елементите на *E*, на които цифрата на десетиците е различна от a. Това подмножество съдържа поне 37 – 9 =28 елемента. Отново прилагаме принципа на Дирихле. Ще има поне 4 елемента с една и съща цифра на десетиците. (В противен случай разглежданите числа ще са най-много 8.3 = 24, те са поне 28). **(1 т.)** По такъв начин си осигуряваме поне 4 числа от *E* с цифра на десетиците b, различна от a. Разглеждаме сега подмножеството на *E*, което се състои от числа с цифри на десетиците, различни от a и b. В това множество има поне 28 – 9 = 19 числа. Както до сега можем да твърдим, че в него има поне 3 числа с еднакви цифри на десетиците (2.7 = 14 $<$ 19). **(1 т.)** И нека тази цифра е c, различна от a и b. Остават поне 19 – 9 = 10 числа. Ясно е, че ще можем да посочим поне две числа с цифра на десетиците d **(1 т.)** и понеже остава поне 10 – 9 = 1 число, което ще има цифра на десетиците e, различна от вече разгледаните **(1 т.)**. Сега се връщаме назад. Взимаме това последно число с цифра на десетиците e. От двете числа с цифра на десетиците d взимаме това, което има цифра на единиците, различна от цифрата на единиците на вече избраното число и така продължаваме нагоре. **(4 т.)**.