МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
СЪЮЗ НА МАТЕМАТИЦИТЕ В БЪЛГАРИЯ

ЗИМНИ МАТЕМАТИЧЕСКИ СЪСТЕЗАНИЯ

П Л Е В Е Н

1 – 3 февруари 2008 г.,

Тема за 7 клас

Задача 1. Съществуват ли числа a и b, за които равенството $251(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-2008=251(x^2+5x+8)(x^2+ax+b)$ е тъждество?

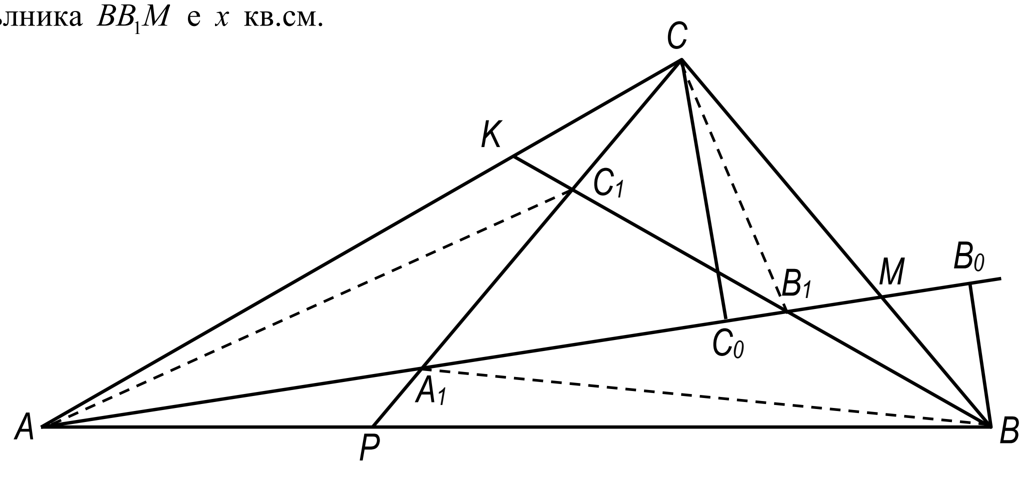
Решение: След разделяне на 251 и привеждане на лявата и на дясната страна в нормален вид получаваме:

$$x^4+10x^3+35x^2+50x+16=x^4+(5+a)x^3+(8+5a+b)x^2+(8a+5b)x+8b$$ **(3 т.).**

От $10=5+a$ намираме $a=5$ **(1 т.).** От $35=8+5a+b$, след като заместим a с 5, получаваме $b=2$ **(1 т.)**. Проверяваме (проверката е задължителна) дали са равни и останалите съответни коефициенти при така получените стойности за a и b. От $8a+5b=50$ и $8b=16$ за $a=5$ и $b=2$ следва, че и останалите съответни коефициенти се изравняват. Следователно при $a=5$ и $b=2$ равенството е тъждество **(1 т.).**

Задача 2. Точките M, K и P лежат съответно на страните BC, CA и AB на триъгълника ABC. Отсечките AM и BK се пресичат в точката B_1, отсечките BK и CP се пресичат в точката C_1, а отсечките CP и AM се пресичат в точката A_1. Ако A_1, B_1 и C_1 са средите съответно на отсечките AB_1, BC_1 и CA_1, да се намери отношението $BM:MC$.

Решение: Нека лицето на триъгълника $A_1B_1C_1$ е равно на $3s$ кв.см, а лицето на триъгълника BB_1M е x кв.см.



Медианите C_1A, A_1B и B_1C делят съответно лицата на триъгълниците AB_1C, BC_1A и A_1BC на две равни части, като всяка част има лице $3s$ кв.см. (лицето на едната половинка е постоянно равна на лицето на триъгълника $A_1B_1C_1$) **(1 т.)**. Медианите AC_1, BA_1 и CB_1 делят лицата съответно на триъгълниците AA_1C, BB_1A и CC_1B на две равни части, като всяка част е с лице $3s$ кв.см **(1 т.).** Оттук следва, че триъгълникът AB_1B има лице $6s$ кв.см, а триъгълникът AB_1C има лице $12s$ кв.см. Тъй като двата триъгълника имат обща страна AB_1, то височината BB_0 $(B_0 \in AM)$ е два пъти по-малка от височината CC_0 $(C_0 \in AM)$ **(1 т.)**. Триъгълникът CB_1M е с лице $(3s - x)$ кв.см и има два пъти по-голямо лице от лицето на триъгълника BB_1M **(1 т.)** (защото за двете височини е изпълнено $CC_0 = 2BB$, а страната B_1M е обща за двата триъгълника). Заключаваме, че $x = s$ **(1 т.)**. Като използваме, че тези два триъгълника имат обща височина от върха B_1, намираме $BM : MC = s : 2s = \frac{1}{2}$ **(1 т.).**

Задача 3. Дадена е квадратна таблица 2008×2008, разделена на клетки (1×1). Какъв е най-малкият брой клетки, които трябва да се изрежат от таблицата така, че от останалата част да не може да се изреже:

а) правоъгълник от три клетки;

б) група от една клетка и две съседни на нея клетки?

Забележка. Съседни наричаме клетките с обща страна.

Решение: а) Да оцветим таблицата в три цвята по следния начин **(1 т.):**

1	2	3	1	2	...
2	3	1	2	3	...
3	1	2	3	1	...
1	2	3	1	2	...
2	3	1	2	3	...
...	...	...	...	...	...

При това оцветяване има $\frac{2009.2007}{3} = 1344021$ клетки в цвят 2, още толкова в цвят 3 и с една повече в цвят 1 **(1 т.)**. Понеже всеки правоъгълник 3×1 покрива полета от трите цвята, достатъчно е да изрежем всички полета от цвят 2 **(1 т.)**. От друга страна, таблицата може да се разреже на 1344021 правоъгълника 3×1 и една клетка (по редове отляво надясно, а последната колона отгоре надолу). Така че, ако изрежем по-малко от 1344021 клетки, поне един от тези правоъгълници ще остане непокътнат **(1 т.)**.

Отговор: 1344021.

б) Да разделим таблицата на квадрати 2×2 **(1 т.)**. Ако от някой квадрат е изрязана не повече от една клетка, то от него ще остане (или ще може да се изреже) ъгълче от три клетки. Така, от всеки квадрат 2×2 трябва да липсват поне две клетки, т.е. трябва да изрежем поне половината клетки **(1 т.)**. Една възможна реализация е да оцветим таблицата шахматно и да изрежем черните полета.

Отговор: 2008.1004 = 2016032. **(1 т.)**

Задача 4. Във всяка от деветте клетки на квадратна таблица с три реда и три стълба е записано по едно естествено число, като и деветте записани числа са различни. Известно е, че произведението на числата във всеки ред на таблицата е точен квадрат, а произведението на числата във всеки стълб е точен куб. Да се намери най-малката възможна стойност на най-голямото от деветте числа, записани в таблицата.

Решение: Нека P е произведението на числата в таблицата. От една страна P трябва да е точен квадрат, защото е произведение на трите произведения от редовете на таблицата, а от друга страна трябва да е точен куб, защото е произведение на трите произведения от трите стълба на таблицата. Оттук следва, че P трябва да е точна шеста степен на естествено число **(1 т.)**. Нека $P = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha} \ldots p_k^{\alpha_k}, p_1 < p_2 < \ldots < p$ е каноничното разлагане на прости множители на това число. Понеже P е точна шеста степен на естествено число, то всеки от степенните показатели $\alpha_1, \alpha, \ldots, \alpha_k$ трябва да е кратен на 6. Да допуснем, че $p_1 < p < \ldots < p_k$ не са първите k прости числа. Нека q е просто число измежду първите k прости числа, различно от $p_1, p, \ldots, p_k$. Ако при всички измежду деветте числа, в чиито разлагания участва p_k, заменим в техните разлагания p_k с q, ще получим нова таблица, в която някои от числата са станали по-малки, а други са останали евентуално същите. При това новата таблица ще има свойството от условието на задачата. Извършвайки описаната замяна необходимия брой пъти, ще достигнем до ситуация с таблица, в която $p_1 < p < \ldots < p_k$ са първите k прости числа и която има свойството от задачата. При това максималният елемент в новата таблица не е по-голям от този в първоначално разглежданата. Ето защо без ограничение на общността на разсъжденията можем да предполагаме, че $p_1 < p < \ldots < p_k$ са първите k прости числа **(1 т.)**. Сега ще разгледаме няколко случая в зависимост от k.

<u>Първи случай</u>: $k = 1$. Тогава всичките девет числа в таблицата трябва да са степени на двойката и максималният елемент в таблицата е най-малко 2^8 **(1 т.)**. (може лесно да се построи пример на таблица, в която този елемент е точно 2^8).

<u>Втори случай</u>: $k = 2$. Тогава всичките девет числа в таблицата ще имат вида $2^\alpha 3^\beta, 0 \le \alpha, 0 \le \beta$. Първите девет естествени числа от този вида са 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16 и тяхното произведение е равно на

$$1.2.3.4.6.8.9.12.16 = 2^1.3^1.2^2.2.3.2^3.3^2.2^2.3.2^4 = 2^{13}.3^5,$$

което не е точна шеста степен на естествено число **(1 т.)**. Следователно е невъзможно да образуваме желаната таблица с тези девет числа. Следващото по големина число от вида $2^\alpha 3^\beta, 0 \le \alpha, 0 \le \beta$ е 18. Ако покажем, че е възможно да получим таблица с някои девет от десетте числа 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16 и 18 (като е ясно, че трябва 18 задължително да участва), ще следва, че в този случай търсената най-малка стойност е 18. Произведението на десетте числа е равно на $2^{13}.3^5.18 = 2^{14}.3^7$, което трябва да разделим на точно едно от десетте числа, за да получим точна шеста степен, т. е. число от вида $2^{6k}.3$. Очевидно това е възможно само ако разделим произведението $2^{14}.3^7$ на $2^2.3 = 12$. Тогава произведението на деветте числа 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 16 и 18 е равно на $2^{12}.3^6 = \left(2^2.3\right)^6$. Да проверим сега, че е възможно да получим таблица с исканите свойства, в която участват числата 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 16 и 18. Да видим как могат да изглеждат произведенията в стълбовете на таблицата, които трябва да са точни кубове. Ако допуснем, че всяко от тези произведения е кратно на 3, то трябва да е кратно и най-малко на 3^3. Но тогава произведението на всички числа трябва да е кратно най-малко на 3^9, а това не е така. Следователно поне едно от произведенията на стълбовете няма изобщо да съдържа множител 3. Това означава, че в този стълб трябва да има само степени на 2. За да бъде произведението на тези степени на 2 точен куб, е необходимо тези степени да бъдат $\{1,2,4\}$ или $\{1,4,16\}$, или $\{2,4,8\}$, или $\{4,8,16\}$. Да разгледаме първата възможност. Можем да предполагаме, че в този момент първият стълб на таблицата изглежда така:

4		
2		
1		

Да отбележим по-нататък, че не е възможно някои три от числата 3, 6, 9 и 18 да попаднат в един стълб, защото тогава в другия стълб ще остане едно от тях и в този стълб произведението не може да е точен куб. Тоест, две от числата 3, 6, 9 и 18 трябва да са в единия, а другите две – в другия стълб на таблицата. Да предположим, че в стълба на 18 е 3, а в стълба на 9 е 6. Тогава числото 8 не може да се сложи нито в единия, нито в другия стълб така, че да получим произведения, които са точни кубове. Значи при 18 е 6, а при 9 е 3. Лесно достигаме до извода, че възможното разпределение на числата в стълбове е $\{1,2,4\},\{3,8,9\}$ и $\{6,16,18\}$. Сега, като използваме, че 1 и 4 са точни квадрати, лесно достигаме до разположение на деветте числа в таблицата, удовлетворяващо условието, а именно:

4	8	18
2	3	6
1	9	16

С това този случай е разгледан и търсената най-малка стойност е 18 **(2 т.)**.

Трети случай: $k \geq 3$. Сега числото P се дели на 5^6. Това е възможно само когато в таблицата поне шест числа се делят на 5 или поне едно число се дели най-малко на 5^2. В първия случай (понеже най-малките шест кратни на 5 са 5, 10, 15, 20, 25 и 30) максималният елемент на таблицата ще е поне 30, а във втория случай този максимален елемент ще е поне $5^2 = 25$. И в двата случая обаче той ще е по-голям от 18 **(1 т.)**.

В крайна сметка заключаваме, че търсената най-малка стойност е 18.

Задачите и темите са обсъдени от членовете на Националната комисия по математика 4 – 8 клас в състав:

проф. Сава Гроздев – председател
Емил Карлов и гл. ас. Иван Ангелов – отговорници за 4 клас
ст.н.с. Тони Чехларова и докторант Ирина Шаркова – отговорници за 5 клас
ст.н.с. Борислав Лазаров и ас. Симеон Замковой – отговорници за 6 клас
докторант Светлозар Дойчев – отговорник за 7 клас
ст.н.с. Ивайло Кортезов – отговорник за 8 клас

Автори на задачите са:

Емил Карлов – 4.2, 4.3, 4.4, 5.2, 7.2, 8.1
Иван Ангелов – 5.4
Тони Чехларова – 4.1, 5.1, 6.2, 7.1
Борислав Лазаров – 6.1, 6.3
Светлозар Дойчев – 5.3, 7.4, 8.2
Ивайло Кортезов – 7.3, 8.3
Сава Гроздев – 6.4, 8.4