

Дванадесети фестивал на младите математици

Созопол, 2023 г.

Първи кръг, Тема за 8 – 9 клас

Задача 1. Даден е остроъгълен триъгълник ABC . Ъглополовящата през върха A , медианата през върха B и височината през върха C се пресичат две по две в три различни точки. Възможно ли е триъгълникът с върхове трите точки да е равностранен?

Задача 2. Да се намерят всички двойки от естествени числа (a, n) , за които числото $a^{2n} + (1 - a^2)n - 1$ се дели на 9.

Задача 3. Годината ЛЕТА (в която Л, Е, Т, А са цифри от 0 до 9, не непременно различни) наричаме *добра*, ако има поне две четворки (x, y, z, t) от реални числа, за които са изпълнени равенствата

$$Л.x + Е.y + Т.z + А.t = Л$$

$$Е.x + Т.y + А.z + Л.t = Е$$

$$Т.x + А.y + Л.z + Е.t = Т$$

$$А.x + Л.y + Е.z + Т.t = А$$

Намерете всички добри години в 21 век (т.е. между 2001 и 2100 включително).

Задача 4. Квадратна таблица 7×7 е разделена на квадратчета със страна 1 чрез прави, успоредни на страните, след което са премахнати четирите ъглови квадратчета. Възможно ли е във всяко от останалите квадратчета да се запише по едно цяло число, така че следните две са едновременно изпълнени:

- Сборът на всички записани числа е положителен.
- За всяко квадратче, което има четири съседа, сборът на петте числа в него и съседите му е отрицателен? (Две квадратчета са съседни, ако имат обща страна.)

Задача 5. Да се намерят всички тройки (a, b, c) от естествени числа, за които числата $a^2 + bc$, $b^2 + ac$, $c^2 + ab$ са степени на 2.

Задача 6. Нека a, b, c и d са реални числа със сбор 1. Означаваме

$$M = a(b + 2c + d) + b(c + 2d + a) + c(d + 2a + b) + d(a + 2b + c)$$

$$N = (a + 2b + c)(b + 2c + d)(c + 2d + a)(d + 2a + b).$$

Да се докаже, че $M \leq N$. Кой са всички четворки (a, b, c, d) , които достигат равенство?

Задача 7. Точките M, N и P са средите съответно на страните AD, BC и AB на изпъкналия четириъгълник $ABCD$. Отсечката MN пресича диагоналите AC и BD в точките K и L съответно. Да се докаже, че описаните окръжности около триъгълниците AMK, BNL и MNP се пресичат в една точка.

Задача 8. Александра и Борис играят следната игра, редувайки се, като Александра започва първа. Първоначално на дъската е записано числото 2. На свой ход играчът изтрива числото на дъската и или го удвоява, или го повдига на квадрат, и записва на дъската полученият резултат. Печели този, който пръв запише число, по-голямо от 2023^{10} . Кой има печеливша стратегия?