# Дванадесети фестивал на младите математици

# Созопол, 2023 г.

## Първи кръг, Тема за 8 – 9 клас

## Р Е Ш Е Н И Я

**Задача 1.** Даден е остроъгълен триъгълник $ABC$. Ъглополовящата през върха $A$, медианата през върха $B$ и височината през върха $C$ се пресичат две по две в три различни точки. Възможно ли е триъгълникът с върхове трите точки да е равностранен?

**Решение.** Не! Нека триъгълникът е $ABC$ с ъглополовяща $AA_1$, медиана $BB_1$ и височина $CC_1$, като $BB_1 \cap CC_1 = X$, $AA_1 \cap BB_1 = Y$ и $AA_1 \cap CC_1 = Z$. Имаме $\sphericalangle A_1AC = 90^\circ - \sphericalangle AZC_1 = 90^\circ - \sphericalangle XZY = 30^\circ$, значи $\sphericalangle BAC = 2\sphericalangle A_1AC = 60^\circ$. Оттук четириъгълникът $AC_1XB_1$ с $\sphericalangle B_1XC_1 = 180^\circ - \sphericalangle YXZ = 120^\circ$ дава $\sphericalangle AB_1X = 90^\circ$. Значи $BB_1$ е височина и медиана в $ABC$ и понеже $ABC$ има ъгъл $60^\circ$, то той е равностранен. Но в такъв случай трите прави от условието се пресичат в една точка, противоречие.

**Оценяване**. По 3 т. за намиране на всеки от ъглите на $ABC$ и 3 т. за довършване

**Задача 2.** Да се намерят всички двойки от естествени числа $(a, n)$, за които числото $a^{2n} + (1 - a^2)n - 1$ се дели на 9.

**Отговор**. $(3k, 9l + 1)$, $(3k - 1, m)$, $(3k - 2, m)$ за произволни естествени $k$, $\ell$, $m$

**Решение.** Ако $a$ се дели на 3, директно получаваме $n \equiv 1 \pmod 9$. Нека $a$ не се дели на 3 – тогава директно се проверява (например разпишете $a \equiv \pm1, \pm2, \pm4$), че $a^6 \equiv 1 \pmod 9$, оттук $a^{2n} \equiv 1, a^2, a^4 \pmod 9$ съответно за $n \equiv 0, 1, 2 \pmod 3$.

- Ако $n$ се дели на 3, то $a^{2n} - 1$ се дели на 9, а $(1 - a^2)n = (1 - a)(1 + a)n$ също, понеже $a$ не се дели на 3, т.е. точно едно от $1 - a$ и $1 + a$ се дели на 3.
- Ако $n \equiv 1 \pmod 3$, то изразът е сравним с $a^2 + (1 - a^2)n - 1 = (1 - a)(1 + a)(n - 1)$ и се дели на 9, както в предния случай.
- Ако $n \equiv 2 \pmod 3$, то изразът е сравним с $a^4 + (1 - a^2)n - 1 = (a - 1)(a + 1)(a^2 + 1 - n)$ и се дели на 9, понеже точно едно от $a - 1$ и $a + 1$ се дели на 3, а $n$ и $a^2 + 1$ дават остатък 2 при деление на 3.

**Оценяване**. 2 т. за напълно верен отговор, 1 т. за случая, когато $a$ се дели на 3, по 3 т. за всяко от $n \equiv 0, 1, 2 \pmod 3$, когато $a$ не се дели на 3.

**Задача 3.** Годината ЛЕТА (в която Л, Е, Т, А са цифри от 0 до 9, не непременно различни) наричаме *добра*, ако има поне две четворки $(x, y, z, t)$ от реални числа, за които са изпълнени равенствата

$$\text{Л}.x + \text{Е}.y + \text{Т}.z + \text{А}.t = \text{Л}$$
$$\text{Е}.x + \text{Т}.y + \text{А}.z + \text{Л}.t = \text{Е}$$
$$\text{Т}.x + \text{А}.y + \text{Л}.z + \text{Е}.t = \text{Т}$$
$$\text{А}.x + \text{Л}.y + \text{Е}.z + \text{Т}.t = \text{А}$$

Намерете всички добри години в 21 век (т.е. между 2001 и 2100 включително).

**Отговор**. 2002, 2013, 2020, 2024, 2035, 2046, 2057, 2068, 2079

**Решение.** (Навсякъде пишем $YEAR$ место ЛЕТА.) Първо ще разгледаме $YEAR = 2100$, т.е. $2x + y = 2$, $x + 2t = 1$, $2z + t = 0$, $2y + z = 0$. Имаме $t = -2z = 4y = 8 - 8x$ и значи $x + 2(8 - 8x) = 1$, откъдето получаваме единствена възможност за $(x, y, z, t)$.
Сега вече можем да считаме $Y = 2$, $E = 0$ и $0 \le A, R \le 9$, т.е. $2x + Az + Rt = 2$, $Ay + Rz + 2t = 0$, $Ax + Ry + 2z = A$ и $Rx + 2y + At = R$. Изразяваме $t = -\frac{A}{2}y - \frac{R}{2}z$ и заместваме в другите две, за да получим

$$2x - \frac{AR}{2}y + \left(A - \frac{R^2}{2}\right)z = 2, \quad Ax + Ry + 2z = A, \quad Rx + \left(2 - \frac{A^2}{2}\right)y - \frac{AR}{2}z = R.$$

Сега изразяваме $x = \frac{AR}{4}y + (\frac{R^2}{4} - \frac{A}{2})z + 1$ и заместваме в другите две, за да получим

$$\left(\frac{A^2R}{4} + R\right)y + \left(\frac{AR^2}{4} - \frac{A^2}{2} + 2\right)z = 0, \quad \left(\frac{AR^2}{4} + 2 - \frac{A^2}{2}\right)y + \left(\frac{R^3}{4} - AR\right)z = 0.$$

Ако $\frac{AR^2}{4} - \frac{A^2}{2} + 2 = 0$, то непременно $\frac{A^2R}{4} + R = 0$ и/или $\frac{R^3}{4} - AR = 0$ (иначе еднозначно получаваме $y = z = 0$, оттам $t = 0$ и $x = 1$, т.е. точно една четворка). Ако $\frac{AR^2}{4} - \frac{A^2}{2} + 2 \neq 0$, то изразяване на $z$ от първото и заместване във второто дава

$$\left(\left(\frac{R^3}{4} - AR\right)\left(\frac{A^2R}{4} + R\right) - \left(\frac{AR^2}{4} - \frac{A^2}{2} + 2\right)^2\right)y = 0.$$

Ако само $y = 0$, то както по-горе получаваме единствено решение; а ако последното е изпълнено за всяко $y$, то получаваме безбройно много решения. Следователно ни остава да видим за кои $A$ и $R$ е изпълнено

$$\left(\frac{R^3}{4} - AR\right)\left(\frac{A^2R}{4} + R\right) = \left(\frac{AR^2}{4} - \frac{A^2}{2} + 2\right)^2$$

(отбелязваме, че това равенство покрива и случаят $\frac{AR^2}{4} - \frac{A^2}{2} + 2 = 0$).

След освобождаване от знаменател и разкриване на скобите получаваме

$$A^4 - 8A^2 + 16 + 8AR^2 = R^4 \Leftrightarrow (A^2 + 4)^2 = (R^2 - 4A)^2 \Leftrightarrow ((A + 2)^2 - R^2)(R^2 + (A - 2)^2) = 0.$$

От вторият множител имаме само $A = 2$, $R = 0$. От другия множител $(A + 2)^2 = R^2$, $R = A + 2$ и $AR = 02$, 13, 24, 35, 46, 57, 68 или 79.

**Оценяване**. 2 т. за верен отговор, 2 т. за отхвърляне на 2100, 8 т. за доказателство на $R = A + 2$, от които 4 т. за получаване на уравнение, в което участват $A$, $R$ и точно една от променливите $x$, $y$, $z$, $t$.

**Задача 4.** Квадратна таблица $7 \times 7$ е разделена на квадратчета със страна 1 чрез прави, успоредни на страните, след което са премахнати четирите ъглови квадратчета. Възможно ли е във всяко от останалите квадратчета да се запише по едно цяло число, така че следните две са едновременно изпълнени:

- Сборът на всички записани числа е положителен.

- За всяко квадратче, което има четири съседа, сборът на петте числа в него и съседите му е отрицателен? (Две квадратчета са съседни, ако имат обща страна.)

**Решение.** Да! В показания пример всяка разглеждана сума от 5 числа е равна на $-1$, докато сборът на всички числа в таблицата е равен на 3.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 1 | 1 | $-5$ | 1 | $-5$ | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | $-5$ | 1 | $-5$ | 1 | $-5$ | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | $-5$ | 1 | $-5$ | 1 | 1 |
| | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | |

**Оценяване**. 1 т. за верен отговор, 8 т. за цялостен пример и 3 т. за ясна проверка на примера

**Задача 5.** Да се намерят всички тройки $(a, b, c)$ от естествени числа, за които числата $a^2 + bc$, $b^2 + ac$, $c^2 + ab$ са степени на 2.

**Отговор**. $a = b = c = 2^t$, където $t$ е произволно цяло неотрицателно число

**Решение.** Нека $a = dx$, $b = dy$, $c = dz$, където НОД$(x, y, z) = 1$ (в частност, поне едно от $x$, $y$, $z$ е нечетно). Тогава $d^2$ (а значи и $d$), както и $x^2 + yz$, $y^2 + zx$, $z^2 + xy$, са степени на 2. Ако точно едно или две от $x$, $y$, $z$ са нечетни, да речем $x$ е нечетно и $z$ е четно, то $x^2 + yz > 1$ е нечетно, противоречие. Ако $x, y, z$ са нечетни, то поне две дават еднакъв остатък при деление на 4, да речем $y$ и $z$ и тогава $x^2 + yz \equiv 2 \pmod 4$, значи $x^2 + yz = 2$ и $x = y = z = 1$. Предвид, че $d$ е степен на 2, получаваме, че всички възможности са $x = y = z = 2^t$, където $t$ е цяло неотрицателно число.

**Оценяване**. 2 т. за верен отговор и проверката му; 2 т. за въвеждане на $d$; 2 т. за случая с едно или две нечетни измежду $x$, $y$, $z$; 4 т. за случая с нечетни $x$, $y$, $z$; 2 т. за довършване

**Задача 6.** Нека $a$, $b$, $c$ и $d$ са реални числа със сбор 1. Означаваме

$$M = a(b + 2c + d) + b(c + 2d + a) + c(d + 2a + b) + d(a + 2b + c)$$

$$N = (a + 2b + c)(b + 2c + d)(c + 2d + a)(d + 2a + b).$$

Да се докаже, че $M \leq N$. Кои са всички четворки $(a, b, c, d)$, които достигат равенство?

**Решение.** Предвид $b+2c+d = 1+c-a$ и аналогичните, получаваме $M = a+b+c+d+2(ac+bd)-(a^2+b^2+c^2+d^2) = 1-(a-c)^2-(b-d)^2$ и $N = (1+b-d)(1+c-a)(1+d-b)(1+a-c) = (1-(b-d)^2)(1-(a-c)^2) = 1-(a-c)^2-(b-d)^2+(a-c)^2(b-d)^2$. Така $M \leq N$ е еквивалентно на очевидното $(a-c)^2(b-d)^2 \geq 0$. Равенство се достига от четворките от видовете $\left(\frac{1-b-d}{2}, b, \frac{1-b-d}{2}, d\right)$ и $\left(a, \frac{1-a-c}{2}, c, \frac{1-a-c}{2}\right)$.

**Оценяване**. 8 т. за доказване на неравенството (от които по 2 т. за всеки от крайните изрази за $M$ и $N$ в посоченото решение), 4 т. за пълно описание на случаите на равенство (2 т. за тези при $a = c$ и 2 т. за тези при $b = d$).

**Задача 7.** Точките $M$, $N$ и $P$ са средите съответно на страните $AD$, $BC$ и $AB$ на изпъкналия четириъгълник $ABCD$. Отсечката $MN$ пресича диагоналите $AC$ и $BD$ в точките $K$ и $L$ съответно. Да се докаже, че описаните окръжности около триъгълниците $AMK$, $BNL$ и $MNP$ се пресичат в една точка.

**Решение.** Нека $Q$ е втората пресечна точка на описаната около триъгълника $MNP$ окръжност с правата $AB$ (считаме $P \equiv Q$, ако окръжността и $AB$ се допират). Ще докажем, че $AMKQ$ е вписан – по аналогичен път ще имаме, че $BNLQ$ е вписан и задачата ще е решена. Действително, $\sphericalangle KMQ = \sphericalangle NPB$ от окръжността на $MNP$ и $\sphericalangle NPB = \sphericalangle CAB = \sphericalangle KAQ$ от средната отсечка $NP$ в триъгълника $ABC$ – следователно $\sphericalangle KMQ = \sphericalangle KAQ$ и исканото следва.

**Оценяване**. 3 т. за съображението, че общата точка ще е върху $AB$ и 1 т. за използване на $MNP$ за построяването на тази точка; 6 т. за вписаността на $AMKQ$ или $BNLQ$; 2 т. за довършване.

**Задача 8.** Александра и Борис играят следната игра, редувайки се, като Александра започва първа. Първоначално на дъската е записано числото 2. На свой ход играчът изтрива числото на дъската и или го удвоява, или го повдига на квадрат, и записва на дъската полученият резултат. Печели този, който пръв запише число, по-голямо от $2023^{10}$. Кой има печеливша стратегия?

**Отговор**. Борис

**Решение.** Нека $k$ е най-малкото естествено число, такова че $2^k > 2023^{10}$. Тогава играта е еквивалентна на следната: първоначално е записано 1 и на всеки ход играчът прибавя 1 или удвоява текущото число и печели този, който пръв запише число, по-голямо или равно на $k$.

Всъщност $k = 110$. Наистина, $2023^{10} < 2048^{10} = 2^{110}$, а $2023^{10} > 2^{109}$ е еквивалентно на $\left(\frac{2023}{2048}\right)^{10} > \frac{1}{2}$, а това е вярно поради $\frac{2023}{2048} > \frac{19}{20}$ и $\left(\frac{19}{20}\right)^{10} > \frac{350^5}{400^5} = \frac{7^5}{8^5} = \frac{16807}{32768} > \frac{1}{2}$.

Сега пресмятаме отгоре-надолу печелившите и губещите позиции. (Тук позиция наричаме печеливша, ако играчът, който я напише, има печеливша стратегия.) Позицията 110 е печеливша, оттук 55, 56, ..., 109 са губещи (с удвояване се печели), така 28, 30, ..., 54 са печеливши и 29, 31, ..., 53 са губещи, съответно 14, 15, ..., 27 са губещи и така 3, 5, ..., 13 са печеливши и 2, 4, ..., 12 са губещи. Понеже Александра на първия си ход записва 2, то тя губи.

**Оценяване**. 3 т. за формулиране на еквивалентната игра със събиране и удвояване, 1 т. за получаване на $k \leq 110$ и 2 т. за получаване на $k \geq 110$, 4 т. за определяне на печелившите и губещите позиции и 2 т. за завършване