Дванадесети фестивал на младите математици

Созопол, 2023 г.

Трети кръг, Тема за 8 – 9 клас

Задача 1. Да се намерят всички двойки (x, y) от естествени числа, такива че

$$(x-y)^2 = \frac{4xy}{x+y+1}.$$

Задача 2. На дъската са написани естествените числа от 1 до 2023. За един ход избираме две числа a и b, изтриваме ги и на тяхно място записваме числото $a+b+ab$. След 2022 хода на дъската остава само едно число – колко възможни стойности има за него?

Задача 3. Крайно или безкрайно е множеството S от естествените числа, които не могат да се запишат във вида $a^2+b^3+c^7$, където a, b и c са естествени числа?

Задача 4. Реалните положителни числа a, b, c удовлетворяват равенството $a^2+b^2+c^2=3$. Да се докаже, че

$$\frac{ab}{1+ab}+\frac{bc}{1+bc}+\frac{ac}{1+ac} \leq \frac{3}{2}.$$

Кога се достига равенство?

Задача 5. Дадени са остроъгълен триъгълник ABC и произволна права ℓ. Нека ℓ_a, ℓ_b и ℓ_c са симетричните прави на ℓ спрямо BC, AC и AB, съответно. Правите ℓ_b и ℓ_c се пресичат в точката A_1, правите ℓ_a и ℓ_c – в B_1, а правите ℓ_a и ℓ_b – в C_1. Да се докаже, че центърът на вписаната в триъгълника $A_1B_1C_1$ окръжност лежи на описаната около триъгълника ABC окръжност.

Задача 6. В равнината са дадени n черни и n червени точки, като никои три от точките не лежат на една права. Да се докаже, че може да построим n отсечки, всяка от които има една червена и една черна точка за край, така че никои две отсечки да не се пресичат.

Задача 7. Да се реши в естествени числа уравнението

$$x^x + 5^y = 3^z.$$

Задача 8. Даден е триъгълник ABC с $\sphericalangle ACB = 120^\circ$. Равностранният триъгълник ABD е такъв, че C и D са в различни полуравнини спрямо правата AB. Да се докаже, че $CD = AC + BC$.