Дванадесети фестивал на младите математици
Созопол, 2023 г.
Трети кръг, Тема за 8 – 9 клас

Задача 1. Да се намерят всички двойки (x, y) от естествени числа, такива че

$$(x-y)^2 = \frac{4xy}{x+y+1}.$$

Отговор. Няма решение.

Решение. Да положим $x + y = a \geq 2$ и $xy = b$. Получаваме $(a^2 - 4b)(a + 1) = 4b$, еквивалентно на $a^2(a + 1) = 4b(a + 2)$. В частност, $a + 2$ дели $a^2(a + 1)$ и понеже $a + 2$ и $a+1$ са взаимнопрости, то $a+2$ дели $a^2 = (a-2)(a+2)+4$, оттук $a+2$ дели 4. Така остава само $a = 2$, съответно $x = y = 1$, но директна проверка показва, че тази двойка не работи.

Оценяване. 1 т. за верен отговор, 2 т. за въвеждане на a и b, 1 т. за достигане до $a^2(a+1) = 4b(a + 2)$, 6 т. за аргументиране, че $a + 2$ дели 4 (от които 3 т. за аргументиране, че $a + 2$ дели a^2), 2 т. за довършване

Задача 2. На дъската са написани естествените числа от 1 до 2023. За един ход избираме две числа a и b, изтриваме ги и на тяхно място записваме числото $a + b + ab$. След 2022 хода на дъската остава само едно число – колко възможни стойности има за него?

Решение. От операцията с a и b получаваме $(a + 1)(b + 1) - 1$. По-общо, от операция с $(a_1 + 1)(a_2 + 1)\cdots(a_k + 1) - 1$ и $(b_1 + 1)(b_2 + 1)\cdots(b_\ell + 1) - 1$ получаваме

$$(a_1 + 1)(a_2 + 1)\cdots(a_k + 1)(b_1 + 1)(b_2 + 1)\cdots(b_\ell + 1) - 1.$$

Следователно накрая остава едно и също число и то е $2024! - 1$.

Оценяване. 2 т. за верен отговор, 2 т. за явен вид на оставащото число (може и като сума), 2 т. за преобразуванието $ab + a + b = (a + 1)(b + 1) - 1$, 6 т. за обобщаване на преобразуванието за произволен брой числа

Задача 3. Крайно или безкрайно е множеството S от естествените числа, които не могат да се запишат във вида $a^2 + b^3 + c^7$, където a, b и c са естествени числа?

Решение. Нека n е произволно естествено число и за удобство да запишем $n = x^{42}$ за някакво реално $x \geq 1$. Неравенството $a^2 + b^3 + c^7 \leq n = x^{42}$ има не повече от x^{41} тройки решения (a, b, c), понеже $a \leq x^{21}$, $b \leq x^{14}$ и $c \leq x^6$, т.е. за тройката общо има не повече от $x^{21} \cdot x^{14} \cdot x^6 = x^{41}$ възможности. Така броят на числата от S, по-малки или равни на n, е поне $n - x^{41} = x^{41}(x - 1)$. Последното расте неограничено с растенето на n и следователно разглежданото множество е безкрайно.

Оценяване. 1 т. за верен отговор, 3 т. за разглеждане на $a^2 + b^3 + c^7 \leq n$, 4 т. за аргументация, че това неравенство има не повече от x^{41} решения, 2 т. за аргументация, че добрите числа са поне $x^{41}(x - 1)$, 2 т. за отбелязване на неограничеността на оценъчния израз. Недовършени подходи с некомбинаторни аргументи не носят точки (освен тази за верен отговор).

Задача 4. Реалните положителни числа a, b, c удовлетворяват равенството $a^2+b^2+c^2=3$. Да се докаже, че:

$$\frac{ab}{1+ab}+\frac{bc}{1+bc}+\frac{ac}{1+ac}\le\frac{3}{2}.$$

Кога се достига равенство?

Решение. Нека първо извадим двете страни от 3 за да обърнем посоката на неравенството. Така ще искаме да докажем, че:

$$3-\frac{ab}{1+ab}+\frac{bc}{1+bc}+\frac{ac}{1+ac}\ge 3-\frac{3}{2}.$$

$$\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+bc}+\frac{1}{1+ac}\ge\frac{3}{2}.$$

Сега можем да използваме Хубавото неравенство, за да сведем до:

$$\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+bc}+\frac{1}{1+ac}\ge\frac{9}{3+ab+bc+ac},$$

Така остава да докажем, че $\dfrac{9}{3+ab+bc+ac}\ge\dfrac{3}{2}$. Това е еквивалентно на $ab+bc+ca\le 3$, т.е. на $ab+bc+ca\le a^2+b^2+c^2$, което може да се запише и като $\frac{1}{2}((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\ge 0$. Последното винаги е вярно, и равенство се достига при $a=b=c=1$.

Оценяване. 2 т. за идеята за изваждане от 3 и умножение по (-1), 1 т. за извършване на това преобразование, 3 т. за прилагане на Хубавото неравенство върху $\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+bc}+\frac{1}{1+ac}$, 4 т. за доказване на $\frac{9}{3+ab+bc+ac}\ge\frac{3}{2}$, 1 т. за твърдението, че равенството е само при $a=b=c=1$ и 1 т. за обосновка, че наистина няма други тройки за равенство

Задача 5. Дадени са остроъгълен триъгълник ABC и произволна права ℓ. Нека ℓ_a, ℓ_b и ℓ_c са симетричните прави на ℓ спрямо BC, AC и AB, съответно. Правите ℓ_b и ℓ_c се пресичат в точката A_1, правите ℓ_a и ℓ_c – в B_1, а правите ℓ_a и ℓ_b – в C_1. Да се докаже, че центърът на вписаната в триъгълника $A_1B_1C_1$ окръжност лежи на описаната около триъгълника ABC окръжност.

Решение. Нека ℓ пресича BC, AC и AB в P, Q и R, като без ограничение R е между A и B, Q е между A и C, C е между B и P (другите случаи са аналогични). От симетриите имаме, че QA и RA са външни ъглополовящи в триъгълника QRA_1, откъдето следва, че A_1A е ъглополовяща на $\sphericalangle QA_1R = \sphericalangle C_1A_1B_1$. Аналогично B_1B е ъглополовяща на $\sphericalangle A_1B_1C_1$ и C_1C е ъглополовяща на $\sphericalangle A_1C_1B_1$.

Нека I е центърът на вписаната в триъгълника $A_1B_1C_1$ окръжност. Тогава $\sphericalangle BIC = \sphericalangle B_1IC_1 = 90^\circ+\frac{1}{2}\sphericalangle B_1A_1C_1 = 90^\circ+\frac{1}{2}\sphericalangle QA_1R$, а от триъгълника QRA_1 (чийто ъглополовящи споменахме по-горе) имаме $\sphericalangle BAC = \sphericalangle QAR = 90^\circ-\frac{1}{2}\sphericalangle QA_1R$. Оттук $\sphericalangle BAC + \sphericalangle BIC = 180^\circ$, с което задачата е решена.

Оценяване. 4 т. за ъглополовящите A_1A, B_1B и C_1C в триъгълника $A_1B_1C_1$ (3 т. ако само една от тях е обоснована), общо 2 т. за въвеждането на I, за формулиране на условие с ъгли, което дава исканото в задачата и за отбелязване, че A_1A, B_1B, C_1C минават през I, 2 т. за изразяване на $\sphericalangle BIC$ (или еквивалентен еднакво полезен ъгъл) чрез *само един* друг ъгъл, в който I не участва, 4 т. за довършване. Не се отнемат точки, ако не са разгледани няколко възможни разположения на точки в чертежа, стига при изпуснатите да не се изискват нови съществено различни аргументи.

Задача 6. В равнината са дадени n черни и n червени точки, като никои три от точките не лежат на една права. Да се докаже, че може да построим n отсечки, всяка от които има една червена и една черна точка за край, така че никои две отсечки да не се пресичат.

Решение. Да разгледаме конфигурацията от n отсечки, при която сборът от дължините им е минимален. Да допуснем, че в нея има две отсечки които се пресичат. Ако A_1B_1 пресича A_2B_2, като A_1, A_2 са сини, а B_1, B_2 са червени, то $A_1A_2B_1B_2$ е изпъкнал четириъгълник и от неравенство на триъгълника следва $A_1B_1 + A_2B_2 > A_1B_2 + A_2B_1$, което е противоречие с минималността.

Оценяване. 8 т. за разглеждане на разпределението с минимален сбор (или формулиране на алчен алгоритъм за размяна на отсечки, която води до това разпределение) и 4 т. за доказване, че то върши работа; не повече от 2 т. се присъждат за неработещ екстремален елемент (напр. минимален брой пресичания) или алгоритъм, както и за недовършени аргументи с индукция

Задача 7. Да се реши в естествени числа уравнението

$$x^x + 5^y = 3^z.$$

Отговор. $(2, 1, 2)$

Решение. Явно x е четно, оттук x^x се дели на 4 и по модул 4 следва, че z е четно. Също, x не се дели на 3 и значи $x^x = (x^2)^{x/2}$ дава остатък 1, оттук y непременно е нечетно. Сега ако допуснем, че $x \geq 4$, то x^x се дели на 8 и понеже $3^z \equiv 1 \pmod 8$ за четно z и $5^y \equiv 5 \pmod 8$ за нечетно y, то исканото е невъзможно. Оттук $x = 2$.

Сега в еквивалентното $5^y = (3^{z/2} - 2)(3^{z/2} + 2)$ множителите вдясно са взаимнопрости (техен общ делител трябва да дели разликата 4 и 5^y), откъдето $3^{z/2} - 2 = 1$, съответно $z = 2$ и еднозначно получаваме $y = 1$.

Оценяване. общо 2 т. за верен отговор и доказателство, че x и z са четни, 4 т. за отхвърляне на $x \geq 4$ (по 2 т. за резултати при всеки от модулите 3 и 8), 2 т. за разлагането и 4 т. за довършване

Задача 8. Даден е триъгълник ABC с $\sphericalangle ACB = 120^\circ$. Равностранният триъгълник ABD е такъв, че C и D са в различни полуравнини спрямо правата AB. Да се докаже, че $CD = AC + BC$.

Решение. (Първи начин) Да забележим, че $ABCD$ е вписан в окръжност, това следва от $\sphericalangle ACB + \sphericalangle ADB = 180^\circ$. Нека означим $AB = BD = AD = x$, и от теоремата на Птолемей следва, че $CD \cdot x = AC \cdot x + BC \cdot x$, откъдето $CD = AC + BC$.

(Втори начин) Да изберем точка X върху CB, такава че $BX = AC$ и B е между C и X. Нека означим $\sphericalangle CAB = \alpha$, $\sphericalangle CAD = 60^\circ + \alpha$. Имаме $\sphericalangle DBX = 60^\circ + \alpha$, откъдето по първи признак за еднаквост $\triangle DBX \cong \triangle DAC$. Оттам $\sphericalangle ACD = \sphericalangle BXD$, $\sphericalangle CDX = 60^\circ$. Също $DC = DX$, откъдето триъгълникът CDX е равностранен, значи $CD = CX = AC + BC$.

Оценяване. (Първи начин) 2 т. за вписаността на $ABCD$, 4 т. за формулировка на теоремата на Птолемей в общия случай, 6 т. за довършване

(Втори начин) 2 т. за въвеждането на X (или построяване на перпендикулярите от D към AC и BC), 6 т. за $\triangle DBX \cong \triangle DAC$, 4 т. за довършване