УСЛОВИЯ И КРАТКИ РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ

8. КЛАС

8.1 Дадено е уравнението $|2x-1|-1=x^2-a$.

а) Да се реши уравнението при $a=2$

б) Да се намерят стойностите на параметъра *a*, за които уравнението има два корена, които са цели числа.

Решение. а) При $a=2$ уравнението е $|2x-1|-1=x^2-2$. При $x\geq\frac{1}{2}$ имаме $x^2-2x=0$ откъдето $x_1=0$ и $x_2=2$. Но $x_1<\frac{1}{2}$, така че само $x_2=2$ е корен (**1 т.**). При $x<\frac{1}{2}$ имаме $x^2+2x-2=0$ откъдето $x_1=-1+\sqrt{5}$ и $x_2=-1-\sqrt{5}$. Но $x_1>\frac{1}{2}$, така че само $x_2=-1-\sqrt{5}$ е корен (**1 т.**). Окончателно корените на уравнението са $x_1=2$ и $x_2=-1-\sqrt{5}$. **(1т.)**

б) I. При $x\geq\frac{1}{2}$ имаме $x^2-2x+2-a=0$ откъдето $x_1=1+\sqrt{a-1}$ и $x_2=1-\sqrt{a-1}$, които са цели при $\sqrt{a-1}=m\geq 0$, където m е цяло число т.е. $a-1=m^2$. Тогава $x_1=1+m$ и $x_2=1-m$ **(1 т.)** Очевидно $x_1\geq\frac{1}{2}$, за всяко цяло $m\geq 0$, а $x_2\geq\frac{1}{2}$, когато $1-m\geq\frac{1}{2}$ или $m\leq\frac{1}{2}$, т.е. $m=0$. **(1 т.)** Тъй като при $m=0$, т.е. $a=1$ уравнението има единствен корен 1, то в този случай уравнението може да има само един цял корен. **(1 т.)**

II. При $x<\frac{1}{2}$ имаме $x^2+2x-a=0$ откъдето $x_1=-1-\sqrt{a+1}$ и $x_2=-1+\sqrt{a+1}$, които са цели при $\sqrt{a+1}=n\geq 0$, където n е цяло число, т.е. $a+1=n^2$. Тогава $x_1=-1-n$ и $x_2=-1+n$, **(1 т.)** Очевидно $x_1<\frac{1}{2}$, за всяко цяло $n\geq 0$, а $x_2<\frac{1}{2}$, когато $-1+n<\frac{1}{2}$ или $n<\frac{3}{2}$, т.е. $n=0$ или 1. **(1 т.)** При $n=0$, т.е. $a=-1$ уравнението има единствен корен –1 и при $n>1$ може да има само един цял корен. При $n=1$, т.е. $a=0$ уравнението има два цели корена – $x_1=-2$ и $x_2=0$ **(1 т.)**

Остава да проверим има ли цели числа $m\geq 1$ и $n\geq 2$, такива че $m^2+1=n^2-1$. От $2=(n-m)(n+m)$ имаме $n-m=1,\ n+m=2$, което е невъзможно при $m\geq 1$ и $n\geq 2$. Окончателно уравнението има два цели корена само при $a=0$. **(1 т.)**

8.2. Числата x и y са такива, че $x(4-3x)+y(4-3y)=3xy$. Да се докаже, че

$$0\leq x+y\leq\frac{16}{9}.$$

Решение. Представяме равенството във вида $4(x+y)=3(x^2+xy+y^2)$. **(1 т.)**

От $x^2+xy+y^2=\left(x+\frac{1}{2}y\right)^2+\frac{3}{4}y^2\geq 0$ следва, че $x+y\geq 0$. **(2т.)**

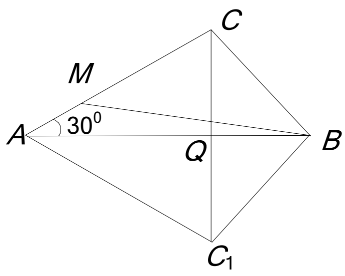
От друга страна $4(x+y)=3\left((x+y)^2-xy\right)$. **(1т.)** Като използваме неравенството $xy\leq\left(\frac{x+y}{2}\right)^2$ ще получим последователно $4(x+y)=3(x+y)^2-3xy\geq 3(x+y)^2-3\left(\frac{x+y}{2}\right)^2$, откъдето $9(x+y)^2\leq 16(x+y)$. **(2 т.)**

Ако $x+y>0$ веднага следва, че $x+y\leq\frac{16}{9}$. **(3 т.)** Ако $x+y=0$, твърдението е очевидно. **(1 т.)**

Алтернативно решение: Нека $x+y=a$. Тогава $y=a-x$ и като заместим x в даденото равенство с получения израз, след опростяване получаваме $3x^2-3ax+3a^2-4a=0$. За това квадратно уравнение относно x знаем, че неговата дискриминанта е неотрицателна, защото има реален корен. Но дискриминантата му е равна на $48a-27a^2$, откъдето следва исканото.

8.3. В триъгълника ABC $\angle ACB = 2\angle ABC$. Точката M лежи върху страната AC, такава че $CM = BC$. Да се намерят ъглите на триъгълника ABC ако $BM = AC$.

Решение. Построяваме $\angle ABC_1 = \angle ABC$ така, че C и C_1 да са в различни полуравнини относно правата AB. Нека точка C_1 върху рамото BC_1 е такава, че $BC_1 = BC$. Тогава $\Delta MBC \cong \Delta CC_1B$, като равнобедрени с едни и същи бедра и $\angle MCB = \angle CBC_1$, откъдето $BM = CC_1$ **(5 т.)**. Тъй като AB е ъглополовяща на $\angle CBC_1$, то $AB \perp CC_1$. Нека $AB \cap CC_1 = Q$. Разглеждаме триъгълника ACQ. Той е правоъгълен, а освен това $AC = 2AQ$ **(3 т.)**. Сега вече $\angle CAB = 30^o$ **(1 т.)** и $\angle ABC = 50^o$ и $\angle ACB = 100^o$ **(1 т.)**.



8.4. В квадратна таблица 2007 х 2007 са записани цели неотрицателни числа така, че ако числото в една клетка е 0, то сборът от числата в реда и стълба, които се пресичат в тази клетка е не по-малък от 2007. Да се докаже, че сборът от всички числа в таблицата е не по-малък от 2 014025.

Решение. Разглеждаме сборовете на числата по редове и стълбове. **(1 т.)** Нека най-малкия такъв сбор е равен на k. **(2 т.)** Нека този сбор е в един от редовете. Тогава в този ред има най-много $2007 - k$ нули. **(1 т.)** От условието имаме, че сбора от числата във всеки стълб, съдържащ една от тези нули е не по-малък от $2007 - k$ **(1 т.)**. Във всеки от останалите k стълба сборът е не по-малък от k. **(1 т.)** Тогава за сбора S на числата в таблицата имаме:

$$S \geq k^2 + (2007-k)^2 = 2k^2 - 2.2007k + 2007^2 = 2\left(k - \frac{2007}{2}\right)^2 + \frac{2007^2}{2} \geq \frac{2007^2}{2} = 2014024,5$$

Ако най-малкия сбор е в един от стълбовете, разглеждаме редовете, съдържащи нулите и получаваме същия резултат за сбора **(3 т.)**.
Тъй като S е цяло число, то $S \geq 2014025$. **(1 т.)**