МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
СЪЮЗ НА МАТЕМАТИЦИТЕ В БЪЛГАРИЯ

Задачите и темите са обсъдени от членовете на Националната комисия по математика 4 – 8 клас в състав:

проф. Сава Гроздев – председател
Емил Карлов и гл. ас. Иван Ангелов – отговорници за 4 клас
ст.н.с. Тони Чехларова и докторант Ирина Шаркова – отговорници за 5 клас
ст.н.с. Борислав Лазаров и ас. Симеон Замковой – отговорници за 6 клас
докторант Светлозар Дойчев – отговорник за 7 клас
ст.н.с. Ивайло Кортезов – отговорник за 8 клас

Автори на задачите са:

Емил Карлов – 4.2, 4.3, 4.4, 5.2, 7.2, 8.1
Иван Ангелов – 5.4
Тони Чехларова – 4.1, 5.1, 6.2, 7.1
Борислав Лазаров – 6.1, 6.3
Светлозар Дойчев – 5.3, 7.4, 8.2
Ивайло Кортезов – 7.3, 8.3
Сава Гроздев – 6.4, 8.4

ЗИМНИ МАТЕМАТИЧЕСКИ СЪСТЕЗАНИЯ

П Л Е В Е Н

1 – 3 февруари 2008 г.,

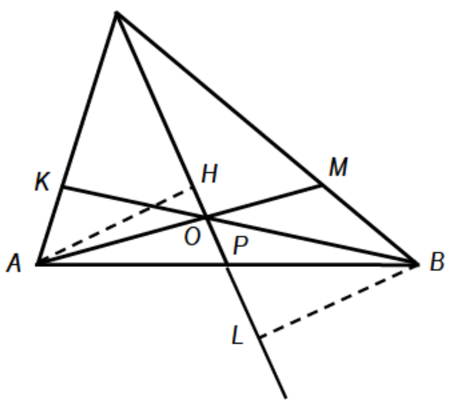
Тема за 8 клас

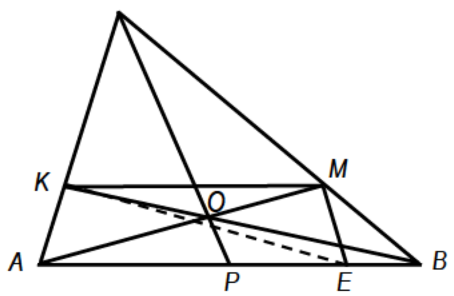
Задача 1. Точка O лежи на медианата CP ($P \in AB$) на остроъгълния триъгълник ABC ($AC < BC$), а правите AO и BO пресичат страните BC и CA съответно в точки M и K. Да се докаже, че:

а) MK е успоредна на AB; б) $AM < BK$.

Решение: Ще използваме факта, че ако O е произволна вътрешна точка в ΔABC и правите AO, BO и CO пресичат съответно страните BC, AC и AB в точки M, K и P, то $S_{AOC} : S_{BOC} = AP\ \ BP$. Наистина, ако H и L са петите на перпендикулярите към правата CP съответно от върховете A и B, то

$$\frac{AP}{BP} = \frac{S_{APO}}{S_{BPO}} = \frac{OP.AH}{OP..BL} = \frac{CO.AH}{CO\,BL} = \frac{{}_{AOC}}{S_{BOC}}$$





а) В конкретния случай на разглежданата задача имаме допълнително, че $S_{AOC} = S_{BOC}$, защото CP е медиана. Тогава $\frac{AK}{KC} = \frac{_{AOB}}{S_{BOC}} = \frac{S_{AOB}}{S_{AOC}} = \frac{BM}{CM}$ **(1 т.)**. Ако $AK = x$ и $KC = y$, лесно получаваме, че лицето на ΔAOK се отнася към лицето на ΔABC както $\frac{x}{x+y}$, а значи (заради доказаното) и лицето на ΔBOM се отнася към лицето на ΔABC както $\frac{x}{x+y}$. Заключаваме, че $S_{AOK} = \ _{BOM}$ **(1 т.)** и следователно четириъгълникът $ABMK$ е трапец, т.е. $KM \parallel AB$ **(1 т.)**.

б) Построяваме равнобедрения трапец $AEMK$ (вж. чертежа). Точка E лежи на отсечката AB, защото $\angle KAE = \Delta AEM$ е по-голям от $\angle ABC$ (AC < BC) **(1 т.)**. Диагоналите AM и KE на равнобедрения трапец $AEMK$ са равни **(1 т.)**. Освен това $\angle KEA$ е остър, защото е част от остър $\angle AEM$ ($= \angle KAE$. Следователно $\angle KEB$ е тъп и за страните на ΔBEK е в сила $BK > KE = AM$ **(1 т.)**.

Забележка. Изискването за остроъгълен триъгълник е направено само за да избегнем разглеждането на втори случай в подточка б).

Задача 2. Да се намерят всички стойности на реалния параметър k така, че за всеки три реални числа a, b и c, за които $ab+bc+ca=0$ и $a^2 \neq kbc, b^2 \neq kac, c^2 \neq kab$, е вярно равенството $\frac{1}{a^2-kbc}+\frac{1}{b^2-kac}+\frac{1}{c^2-kab}=0$.

Решение: Да изберем $a=1, b=-2, c=-2$. Тогава $ab+bc+ca=0$, но трябва и $k \neq \frac{1}{4}$ $\ 2$. Равенството $\frac{1}{a^2-kbc}+\frac{1}{b^2-kac}+\frac{1}{c^2-kab}=0$ можем да запишем във вида $\frac{1}{1-4k}+\frac{1}{2+k}=0 \Rightarrow \frac{1}{2+k}=\frac{1}{4k-1} \Rightarrow 2+k=4k-1 \Rightarrow k=1$. Следователно само k $\ \frac{1}{4}, -2, 1$ могат да бъдат решения на задачата **(1 т.)**. Ако изберем $a=3, b=-2, c=6$, то изразът $\frac{1}{a^2-kbc}+\frac{1}{b^2-kac}+\frac{1}{c^2-kab}$ ще приеме вида $\frac{1}{9+12k}+\frac{1}{4-18k}+\frac{1}{36+6k}$ и ще е равен на нула само при $k=-2$ и $k=1$ **(1 т.)**. Да докажем сега, че тези две стойности на k са решения на задачата. От $ab+bc+ca=0$ следва, че $-bc=ab+ca$. Оттук при $k=1$ $\frac{1}{a^2-bc}=\frac{1}{a\ \ +ab+ac}=\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{a+b+c}$ **(1 т.)**. Аналогично $\frac{1}{b^2-ac}=\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{a+b+c}$ и $\frac{1}{c^2-ab}=\frac{1}{c}\cdot\frac{1}{a+b+c}$, откъдето $\frac{1}{a^2-bc}+\frac{1}{b\ \ -ac}+\frac{1}{c\ \ -ab}=\frac{1}{a+b+c}\left|\ \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$. Но $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{ab+bc+ca}{abc}=0$, откъдето следва исканото **(1 т.)**.

При $k=-2$ за знаменателя на първата дроб имаме $a^2+2bc=a\ \ +bc-ac-ab=(a-b)(a-c)$ и аналогично за другите знаменатели **(1 т.)**. Оттук $\frac{1}{a^2+2bc}+\frac{1}{b\ \ +2ac}+\frac{1}{c\ \ +2ab}=\frac{1}{(a-b)(a-c)}+\frac{1}{(b-c)(b-a)}+\frac{1}{(c-a)(c-b)}=$

$$= \frac{(b-c)+(c-a)+(a-b)}{(a-b)(a-c)(b-c)} \quad 0$$ **(1 т.)**.

Задача 3. Да се реши в естествени числа уравнението $(xy-6)^2+16=x^2+4y^2$.

Решение: Разкриваме скобите и добавяме $4xy$:

$$x^2y^2 - 8xy + 36 + 16 = x^2 + 4xy + 4y^2$$
$$(xy-4)^2 + 36 = (x+2y)^2$$
$$(x+2y)^2 - (xy-4)^2 = 36$$
$$(x+2y+xy-4)(x+2y-xy+4) = 36$$ **(1 т.)**.

Числата в двете скоби имат еднаква четност, така че имаме следните случаи **(1 т.)**:

<u>*Случай А*</u> **(1 т.)** $x + 2y + xy - 4 = 18$
$x + 2y - xy + 4 = 2.$

Оттук $x + 2y = 10$, $xy - 4 = 8$, $xy = 12$, в което заместваме $x = 10 - 2y$ и получаваме $(10 - 2y)y = 12$. Решенията на полученото уравнение са $y = 2$ и $y = 3$. Съответно $x = 6$ и $x = 4$.

<u>*Случай Б*</u> **(1 т.)** $x + 2y + xy - 4 = 6$
$x + 2y - xy + 4 = 6.$

Оттук $x + 2y = 6$, $xy - 4 = 0$, $xy = 4$, в което заместваме $x = 6 - 2y$ и получаваме $(6 - 2y)y = 4$. Решенията на полученото уравнение са $y = 2$ и $y = 1$. Съответно $x = 2$ и $x = 4$.

<u>*Случай В*</u> **(1 т.)** $x + 2y + xy - 4 = 2$
$x + 2y - xy + 4 = 18.$

Оттук $x + 2y = 10$, $xy - 4 = -8$, $xy = -4$, което е невъзможно.

Окончателно решенията за $(x; y)$ са (6;2), (4;3), (2;2), (4;1)

(По 0,5 т. за всяко вярно намерено решение. Задачата допуска и други подходи, при които схемата за оценяване се адаптира по съответен начин.)

Задача 4. Да се намерят две последователни цели числа, между квадратите на които е заключено числото

$$A = \frac{2.4.6...2008}{1.3.5...2007}.$$

Решение: Нека $B = \frac{3.5...2007.2009}{2.4...2006.2008}$. Като използваме, че $\frac{k}{-1} > \frac{k+1}{k}$ за всяко $k > 1$, лесно получаваме, че $A > B$. Ще подобрим това неравенство, като потърсим число $a < 1$ така, че $aA > B$. Числото a определяме от условието $\frac{2}{1}.\frac{4}{3}.a = \frac{3}{2}.\frac{5}{4}$, т.е. $a = \frac{45}{64}$. Понеже $A = \frac{2009}{B}$, от неравенството $aA > B$ намираме $aA^2 > A.B = 2009$, т.е. $A^2 \ \frac{2009}{a} = \frac{2009.64}{45}$. Но $\frac{2009.64}{45} > 49^2$ и следователно $A > 49 = 7^2$. От друга страна $\frac{3}{2} > -$, $\frac{5}{4} > -$, … , $\frac{2007}{2006} > \frac{2008}{2007}$ и следователно $\frac{2008}{2009}.B > \frac{A}{2}$. Както по-горе получаваме $A^2 < 2008.2 = 4016 < 4096 = 64^2$, откъдето $A < 64 = 8^2$. Окончателно $7^2 < A < 8$ и $(-7)^2 < A < (-8)$, т.е. задачата има две решения.

Задачата се оценява с **(7 т.)**, като отделни точки се присъждат за частични резултати. Само отговор без правилни обосновки **(1 т.)**.