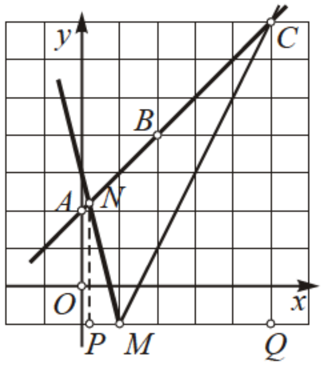
МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА

СЪЮЗ НА МАТЕМАТИЦИТЕ В БЪЛГАРИЯ

Зимни математически състезания
31 януари – 2 февруари 2014 г., БУРГАС
Тема за 8 клас, решения и оценяване

Задача 8.1. Дадени са функциите $f(x)=ax+b$ и $g(x)=|3x-3|-x$. Ако графиката на функцията $f(x)$ минава през точките $A(0;2)$ и $B(2;4)$, да се намери лицето на триъгълника, заключен между графиките на двете функции, построени в координатна система с единична отсечка 1 см.

Решение: От даденото в условието за функцията $f(x)$ получаваме, че $f(0)=a.0+b=2\Rightarrow b=2$ и $f(2)=a.2+2=4\Rightarrow a=1$, т.е. функцията е $f(x)=x+2$. **(1 т.)**



След разкриване на модула, за функцията $g(x)$ получаваме, че $g(x)=3-4x$, при $x<1$ и $g(x)=2x-3$, при $x\geq 1$. **(1 т.)**

Начертаваме графиките на двете функции в една координатна система и отбелязваме с M, N и C върховете на образувания от тях триъгълник. Лесно се вижда, че $M(1;-1)$.

Абсцисите на точките N и C са решенията съответно на уравненията $x+2=3-4x$ и $x+2=2x-3$, откъдето $N\left(\frac{1}{5};2\frac{1}{5}\right)$ и $C(5;7)$. (**1 т.** за намерени верни координати на трите върха) Разглеждаме трапеца $PQCN$, като $P\left(\frac{1}{5};-1\right)$ и $Q(5;-1)$. Тогава

$S_{NMC}=S_{PQCN}-S_{PMN}-S_{MQC}=\frac{CQ+NP}{2}PQ-\frac{NP.MP}{2}-\frac{CQ.MQ}{2}=9{,}6\,\text{см}^2$. (**1 т.** за представяне на лицето на ΔNMC чрез лицата на други фигури и **2 т.** за намиране на лицето му).

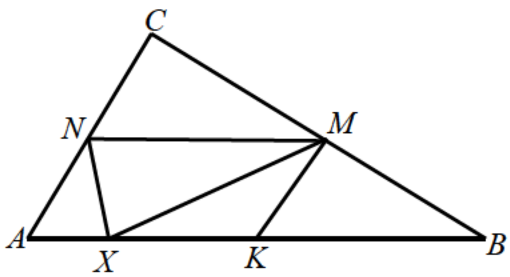
Задача 8.2. Даден е ΔABC, за който $AC<AB<BC$. Средите на страните AB, BC и AC са означени съответно с K, M и N. Върху страната AB е взета точка X, а върху страната BC – точки Y и Z така, че $BX=XA+AC$, $AB+BY=YC$ и $AC+CZ=ZB$. Да се докаже, че:

а) MX е ъглополовяща на $\angle KMN$;

б) правите MX, NY и KZ минават през една точка.

Решение: Ще използваме стандартните означения за дължините на страните на ΔABC, а именно $AB=c$, $BC=a$ и $AC=b$.

а) От условието на задачата следва, че $AX=BX-AC=AB-AX-AC=c-b-AX$ и следователно $AX=\frac{c-b}{2}$. **(1 т.)** Тогава



$$XK=AK-AX=\frac{c}{2}-\frac{c-b}{2}=\frac{b}{2}.\ \textbf{(0,5 т.)}$$

За средната отсечка KM в ΔABC имаме $KM=\frac{b}{2}$ **(0,5 т.)** и следователно ΔXKM е равнобедрен, т.е. $\angle KXM=\angle XMK$. **(0,5 т.)** От друга страна средната отсечка NM в ΔABC е успоредна на AB и следователно $\angle KXM=\angle XMN$. **(1 т.)** Заключаваме, че $\angle XMK=\angle XMN$, т.е. MX е ъглополовяща на $\angle KMN$. **(0,5 т.)**

б) По същия начин, както в а) се доказва, че NY и KZ са ъглополовящи съответно на $\angle MNK$ и $\angle NKM$, **(1 т.)** т.е. MX, NY и KZ са ъглополовящи в ΔMNK и следователно минават през една точка. **(1 т.)**

Задача 8.3. Една обикновена дроб се нарича *египетска* (още *аликвотна*), ако числителят ѝ е равен на 1, а знаменателят ѝ е естествено число. За дробта $\frac{2013}{2014}$ да се докаже, че:

а) съществува представяне в сума от египетски дроби;

б) съществуват безброй много представяния в суми от египетски дроби.

Решение: а) Едно възможно представяне **(3 т.)** е следното:

$$\frac{2013}{2014}=\frac{2014-1}{2014}=1-\frac{1}{2014}=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2013}-\frac{1}{2014}\right)=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\ldots+\frac{1}{2013.2104}$$

б) Достатъчно е да забележим, че $1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$, **(2 т.)** откъдето

$$\frac{1}{n}=\frac{1}{2n}+\frac{1}{3n}+\frac{1}{6n}.\ \textbf{(1 т.)}$$

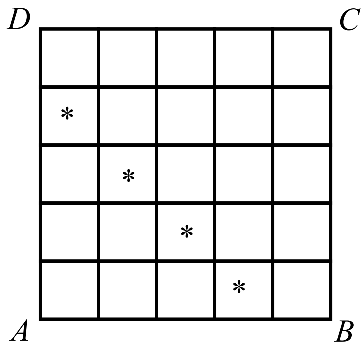
Тогава всяка от дробите в представянето от а) може да се представи като сума от 3 египетски дроби, всяка от тези 3 дроби като сума от нови 3 египетски дроби и т.н. **(1 т.)**

Задача 8.4. Квадрат $ABCD$ е разделен на 25 единични квадратчета и във всяко от тях е поставено някое от естествените числа a, b, c, d и e така, че във всеки ред, всеки стълб и по диагоналите AC и BD всяко от тези числа се среща точно по веднъж.

а) Дайте пример на такъв квадрат.

б) Намерете възможно най-малката сума на числата в квадратчетата, означени със звездички.

в) Намерете възможно най-голямата сума на числата в квадратчетата, означени със звездички, ако $a+b+c+d+e=2014$.



Решение:

Лема. Измежду числата в квадратчетата, означени със звездички, има най-много две еднакви. Съществува случай с точно две еднакви. (**4 т.**, по **1 т.** за всеки от четирите основни случая)

Доказателство: Нека числото в центъра на квадрата е a. Тогава числата в четирите ъгъла на квадрата трябва да са различни от a и различни помежду си, за да е изпълнено условието на задачата. Едно възможно начално разположение е показано на черт. 1. Всички останали се получават от него чрез разместване (пермутация) на числата a, b, c, d и e или отразяване спрямо някой от диагоналите. Изобщо в доказателството е достатъчно да разгледаме различните възможности с точност до пермутация и отразяване.

D C

b				c
		a		
e				d

A B

Черт. 1

D C

b				c
	c			
		a		
			e	
e				d

A B

Черт. 2

D C

b			x	c
x	c		d	
		a		
	b		e	x
e				d

A B

Черт. 3

D C

b				c
	c		b	
		a		
	d		e	
e				d

A B

Черт. 4

Празните квадратчета по диагонала BD на черт. 1 могат да бъдат запълнени само с числата c и e, т.е. по 2 начина. Достатъчно е да разгледаме само случая от черт. 2, защото другият случай се получава от него чрез отразяване спрямо AC и смяна на b с d. За празните квадратчета по диагонала AC от черт. 2 има 2 възможности, които са показани на черт. 3 и черт. 4. Ще разгледаме поотделно всяка от тези възможности. Започваме с черт. 3 и разглеждаме квадратчетата, означени с x. От условието на задачата следва, че със сигурност $x = a$. Сега за второто квадратче на първия ред има 2 възможности: числото в него да е d или e. Оттук нататък всяка от тези възможности се допълва еднозначно и стигаме до двете разположения на черт. 5 и черт. 6.

D C

b	d	e	a	c
a	c	b	d	e
d	e	a	c	b
c	b	d	e	a
e	a	c	b	d

A B

Черт. 5

D C

b	e	d	a	c
a	c	e	d	b
c	d	a	b	e
d	b	c	e	a
e	a	b	c	d

A B

Черт. 6

Продължаваме с черт. 4. За числото във второто квадратче от първия ред има две възможности: a или e. Във всеки от тези два случая останалите квадратчета се попълват еднозначно и получаваме разположенията на черт. 7 и черт. 8.

D C

b	a	e	d	c
a	c	d	b	e
d	e	a	c	b
c	d	b	e	a
e	b	c	a	d

A B

Черт. 7

D C

b	e	d	a	c
d	c	e	b	a
c	b	a	d	e
a	d	c	e	b
e	a	b	c	d

A B

Черт. 8

Така окончателно получаваме общо 4 възможни разположения с точност до пермутация и отразяване. В три от тях две от числата в квадратчетата със звездички съвпадат, а в едната числата са различни. С това лемата е доказана.

а) **(1 т.)** Няколко примера са дадени в доказателството на лемата.

б) **(1 т.)** Достатъчно е да вземем случая например от черт. 7 и да положим $a=1$, $b=2$ и $e=3$. Така стигаме до отговора 7.

в) **(1 т.)** Достатъчно е да вземем отново случая от черт. 7 и да положим $a=2004$, $b=3$, $c=1$, $d=2$ и $e=4$. Тогава $a+b+c+d+e=2014$, а $2a+b+e=4015$, което е отговорът на задачата.

Задачите са предложени, както следва:

Задача 8.1. – Мариана Кьосева
Задача 8.2. – Стоян Ненков
Задачи 8.3. и 8.4. – Веселин Ненков и Сава Гроздев