Кратки решения на задачите

Задача 9.1. Нека a е реално число такова, че квадратното уравнение $x^2 - x + a = 0$ има два различни реални корена x_1 и x_2. Да се докаже, че $|x_1^2 - x_2^2| = 1$ тогава и само тогава, когато $|x_1^3 - x_2^3| = 1$.

Решение. Нека $|x_1^2 - x_2^2| = 1$. Понеже $x_1 + x_2 = 1$, то $|x_1 - x_2| = 1 \iff (x_1 - x_2)^2 = 1 \iff 1 - 4a = 1$, т.е. $a = 0$ и корените на уравнението са 0 и 1. Следователно $|x_1^3 - x_2^3| = 1$.

Нека $|x_1^3 - x_2^3| = 1$. Следователно $(x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_1 + x_2^2) = 1 \iff (x_1 - x_2)^2(1-a)^2 = 1$, откъдето $(1-4a)(1-a)^2 = 1$. Последното е изпълнено очевидно при $a = 0$. Ако $a < 0$, то $1 - 4a > 1$ и $1 - a > 1$, а ако $a > 0$, то $0 < 1 - 4a < 1$ и $0 < 1 - a < 1$. Във всеки от тези случаи равенство не може да се постигне. Остава единствено $a = 0$ и тогава корените на квадратното уравнение ще са 0 и 1, откъдето $|x_1^2 - x_2^2| = 1$.

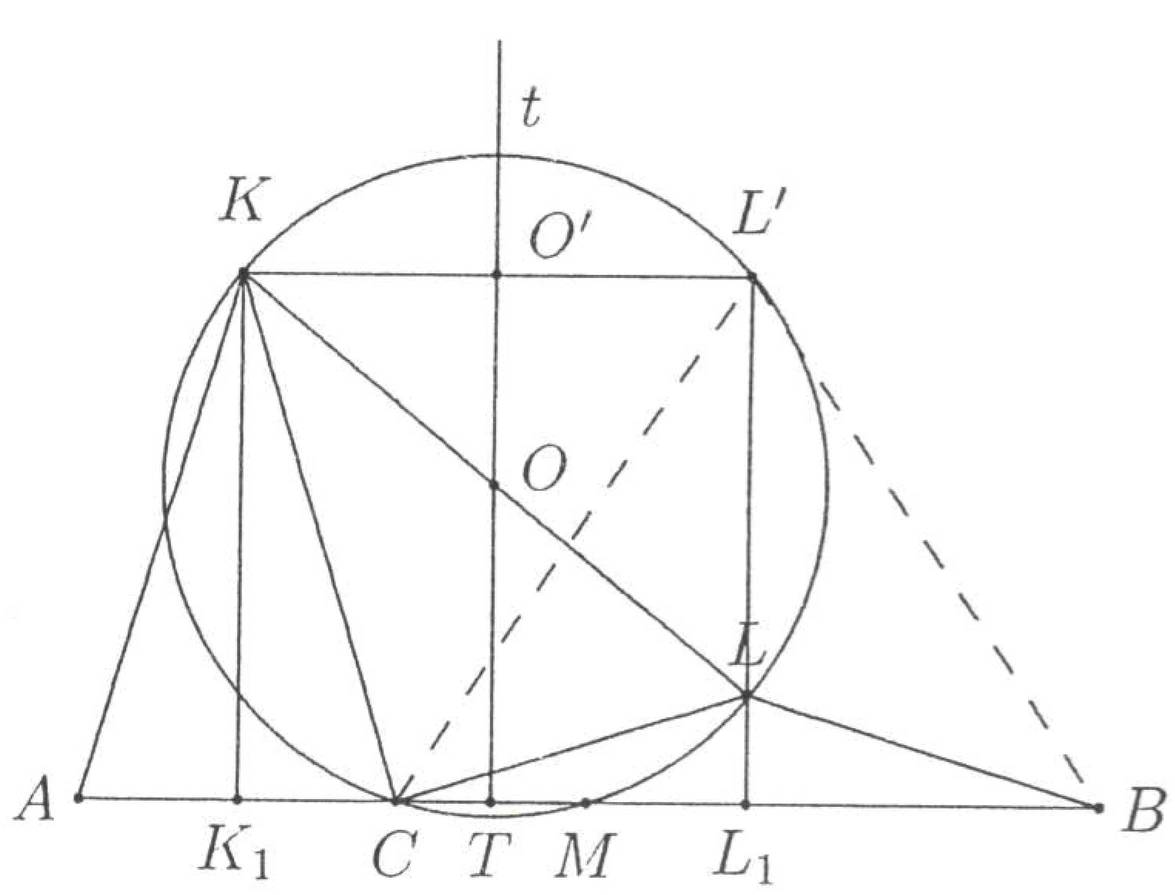
Задача 9.2. Точка M е средата на отсечката AB, а точка C е вътрешна за AB и $C \neq M$. В едната полуравнина относно правата AB са построени равнобедрени триъгълници ACK ($AK = CK$) и BCL ($BL = CL$), такива че K, C, L и M лежат на една окръжност. Да се докаже, че или $KL \parallel AB$ или $KA \perp LB$.

Решение. Нека K_1 и L_1 са средите на AC и BC. Тогава $KK_1 \parallel LL_1$ (защо?), т.е. KK_1L_1L е трапец. Нека T е средата на CM и $AC < BC$. Тогава

$$CM = \frac{BC - AC}{2}, \quad CT = \frac{BC - AC}{4},$$

$$K_1T = \frac{AC}{2} + \frac{BC - AC}{4} = \frac{BC + AC}{4},$$

$$L_1T = \frac{BC}{2} - \frac{BC - AC}{4} = \frac{BC + AC}{4}.$$



Следователно T е средата на K_1L_1. Нека t е средната основа на KK_1L_1L ($T \in t, t \perp K_1L_1$). Тогава t е диаметър на k, защото T е средата на хордата CM и $t \perp CM$.

Ако $t \cap KL = O$, то O е средата на хордата KL. Следователно имаме две възможности:

1) $t \perp KL$ и тогава $KL \parallel AB$;

2) KL е диаметър на k. Тогава $\sphericalangle KCL = 90^\circ$ и $\sphericalangle KCA + \sphericalangle LCB = 90^\circ$. Но $\sphericalangle KAC = \sphericalangle KCA$ и $\sphericalangle LBC = \sphericalangle LCB$, откъдето $\sphericalangle KAC + \sphericalangle LBC = 90^\circ$, т.е. $KA \perp LB$.

Задача 9.3. Да се намери най-малкото естествено число n, за което съществуват цели числа $x_1, x_2, \dots x_n$, такива че

$$x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_n^3 = 2008.$$

Решение. Очевидно $n > 1$, защото 2008 не е точна трета степен. Да допуснем, че $n = 2$. Тогава от равенството $x_1^3 + x_2^3 = 2008$ следва, че x_1 и x_2 са едновременно четни или едновременно нечетни. Ще разгледаме двата случая. Нека $x_1 = 2y_1$ и $x_2 = 2y_2$. Тогава $y_1^3 + y_2^3 = 251$. Числото 251 е просто, а от числата y_1 и y_2 едното е четно, а другото е нечетно, за определеност нека y_2 е четно. Тогава

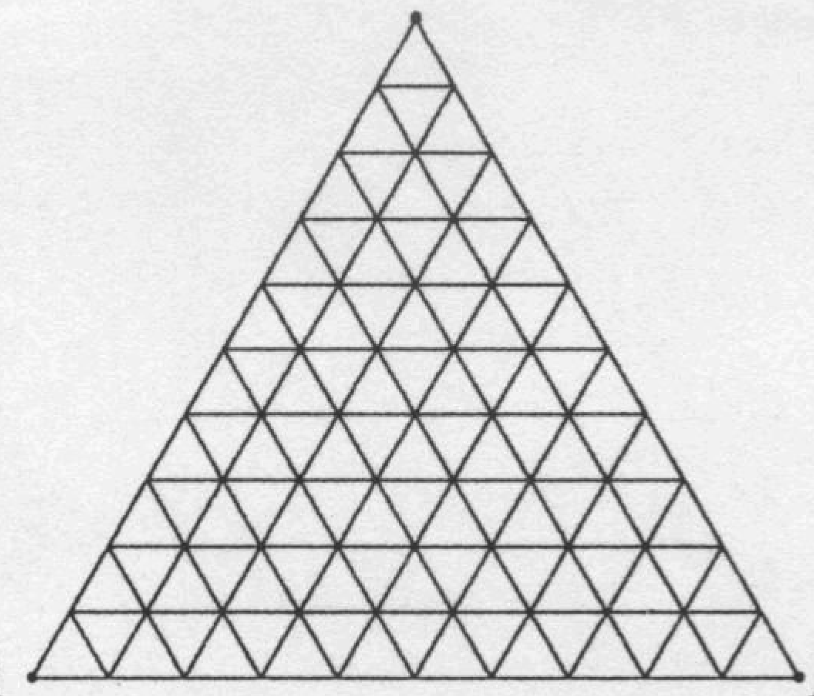
$$251 = (y_1 + y_2)(y_1^2 - y_1y_2 + y_2^2) = (y_1 + y_2)\left(\left(y_1 - \frac{y_2}{2}\right)^2 + \frac{3y_2^2}{4}\right).$$

Числото във втората скоба е очевидно по-голямо от 1 и следователно $y_1 + y_2 = 1$ и $y_1^2 - y_1y_2 + y_2^2 = 251$, откъдето $1 - 3y_1y_2 = 251$, което е противоречие, тъй като 250 не се дели на 3. Нека сега x_1 и x_2 са нечетни. Тогава от $2008 = x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2)$ следва, че $x_1 + x_2$ се дели на 8, защото вторият множител е нечетен. Лесно се вижда, че $x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 > 1$ и следователно $x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 = 251$ и $x_1 + x_2 = 8$, откъдето $251 = (x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2 = 64 - 3x_1x_2$, т.е. $3x_1x_2 = -187$, което е невъзможно. Следователно търсеното n е по-голямо от 2. Но при $n = 3$ имаме очевидното решение $2008 = 1000 + 1000 + 8 = 10^3 + 10^3 + 2^3$. Следователно търсената минимална стойност на n е 3.

Задача 9.4. Равностранен триъгълник ABC е разделен на 100 равностранни триъгълници с дължина на страната 1 чрез прави успоредни на страните на ABC. Да се намери броя на всички равнобедрени трапеци, получени при разделянето на ABC, с основи, успоредни на една от страните на ABC и бедра, успоредни на другите две страни.

Решение. Нека са построени n прави успоредни на AB. Започвайки от правата най-близко до C при всяка следваща права получаваме с два триъгълника повече, докато стигнем до $(n + 1)$-та права AB. Тогава броят на триъгълниците е: $1+3+5+\cdots+(2n+1)=(n+1)^2$. Оттук намираме $n=9$, т.е. страните на ABC са с дължина 10.

Ясно е, че ако трапеците с основи успоредни на AB са N, то всички трапеци са $3N$, и е достатъчно да преброим трапеците с основи успоредни на AB. Означаваме с (n,m) трапец с дължина на малката основа n и на бедрото m. Тогава дължината на голямата основа е $n+m$, откъдето $n+m \leq 10$. Ще преброим първо трапеците, на които голямата основа е между малката и AB.



Така получаваме последователно при $m=1,2,\ldots,9$.

(1, 1): 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45

(2, 1): 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36

(3, 1): 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28

....

(8, 1): 1 + 2 = 3

(9, 1): 1

За $(n,1); n=1,2,\ldots,9$: $1+3+6+10+15+21+28+36+45=165$.

Аналогично: За $(n,2); n=1,2,\ldots,8$: $1+3+6+10+15+21+28+36=120$.

За $(n,3); n=1,2,\ldots,7: 1+3+6+10+15+21+28=84$.

За $(n,4); n=1,2,\ldots,6: 1+3+6+10+15+21=56$.

За $(n,5); n=1,2,\ldots,5: 1+3+6+10+15=35$.

За $(n,6); n=1,2,\ldots,4: 1+3+6+10=20$.

За $(n,7); n=1,2,3: 1+3+6=10$.

За $(n,8); n=1,2: 1+3=4$.

За $(n,9); n=1: 1$.

Общо: $1+4+10+20+35+56+84+120+165=495$. На всеки трапец (n,m) с $n>m$ отговаря трапец $(n-m,m)$, на който малката основа е между голямата и AB. Така получаваме още:

За $(2,1); (3,1),\ldots,(9,1): 1+3+\cdots+36=120$.

За $(3,2); (4,2),\ldots,(8,2): 1+3+\cdots+21=56$.

За $(4,3); (5,3),\ldots,(7,3): 1+3+\cdots+10=20$.

За $(5,4);(6,4):1+3=4$.

Общо: $4+20+56+120=200$. Тогава трапеците с основи успоредни на AB са $495+200=695$, а всички трапеци са $3.695=2085$.

Задача 10.1. Даден е квадратният тричлен $f(x)=x^2+ax+2$, където a е реален параметър. Известно е, че уравнението $f(x)-x=0$ има два реални корена x_1 и x_2, а уравнението $f(x-a)-x=0$ – два реални корена x_3 и x_4, като е изпълнено равенството $x_3-x_1=3(x_4-x_2)$.

а) Да се докаже, че $x_4=x_2+\dfrac{a}{2}$.

б) Да се намерят всички възможни стойности на a.

Решение. а) Имаме

$$\begin{aligned} f(x)-x &= x^2+(a-1)x+2 \\ f(x-a)-x &= x^2-(a+1)x+2. \end{aligned}$$

Сега от условието получаваме $x_3-x_1+x_4-x_2=4(x_4-x_2)$, откъдето $4(x_4-x_2)=(a+1)+(a-1)=2a$. Следователно $x_4=x_2+\frac{a}{2}$.

б) От условието и а) получаваме системата

$$\left| \begin{array}{l} x_2^2+(a-1)x_2+2=0 \\ \left(x_2^2+\frac{a}{2}\right)^2-(a+1)\left(x_2+\frac{a}{2}\right)+2=0. \end{array} \right.$$

Изваждайки първото от второто уравнение и решавайки по отношение на x_2 получаваме $x_2=-\dfrac{a}{4}-\dfrac{1}{2}$. Заместваме получената стойност за x_2 в уравнението $f(x)-x=0$:

$$\left(-\frac{1}{4}a-\frac{1}{2}\right)^2+(a-1)\left(-\frac{1}{4}a-\frac{1}{2}\right)+2=0.$$

откъдето $a^2=\dfrac{44}{3}$ и $a=\pm\sqrt{\dfrac{44}{3}}=\pm\dfrac{2\sqrt{33}}{3}$.

Задача 10.2. Върху страните AC и BC на $\triangle ABC$ с $AC<BC$ са взети съответно точки M и N като $AM=BN$. Нека P е пресечната точка на правите AN и BM, а Q е точка върху отсечката BC, за която $BQ=AC$. Да се докаже, че правата PQ е успоредна на ъглополовящата на $\triangle ABC$ през върха C.

Решение. Означаваме $y=BN=AM$, $BC=a$ и $AC=b$. Тогава $CM=NQ=b-y$ и $NC=a-y$. Ако $PQ \parallel AC$, то $\dfrac{PQ}{MC}=\dfrac{BQ}{BC}$, т.е. $a=\dfrac{b(b-y)}{PQ}$ и аналогично $\dfrac{PQ}{AC} = \dfrac{NQ}{NC}$, т.е. $a - y = \dfrac{b(b-y)}{PQ}$. Следователно $a = a - y$, което е невъзможно.

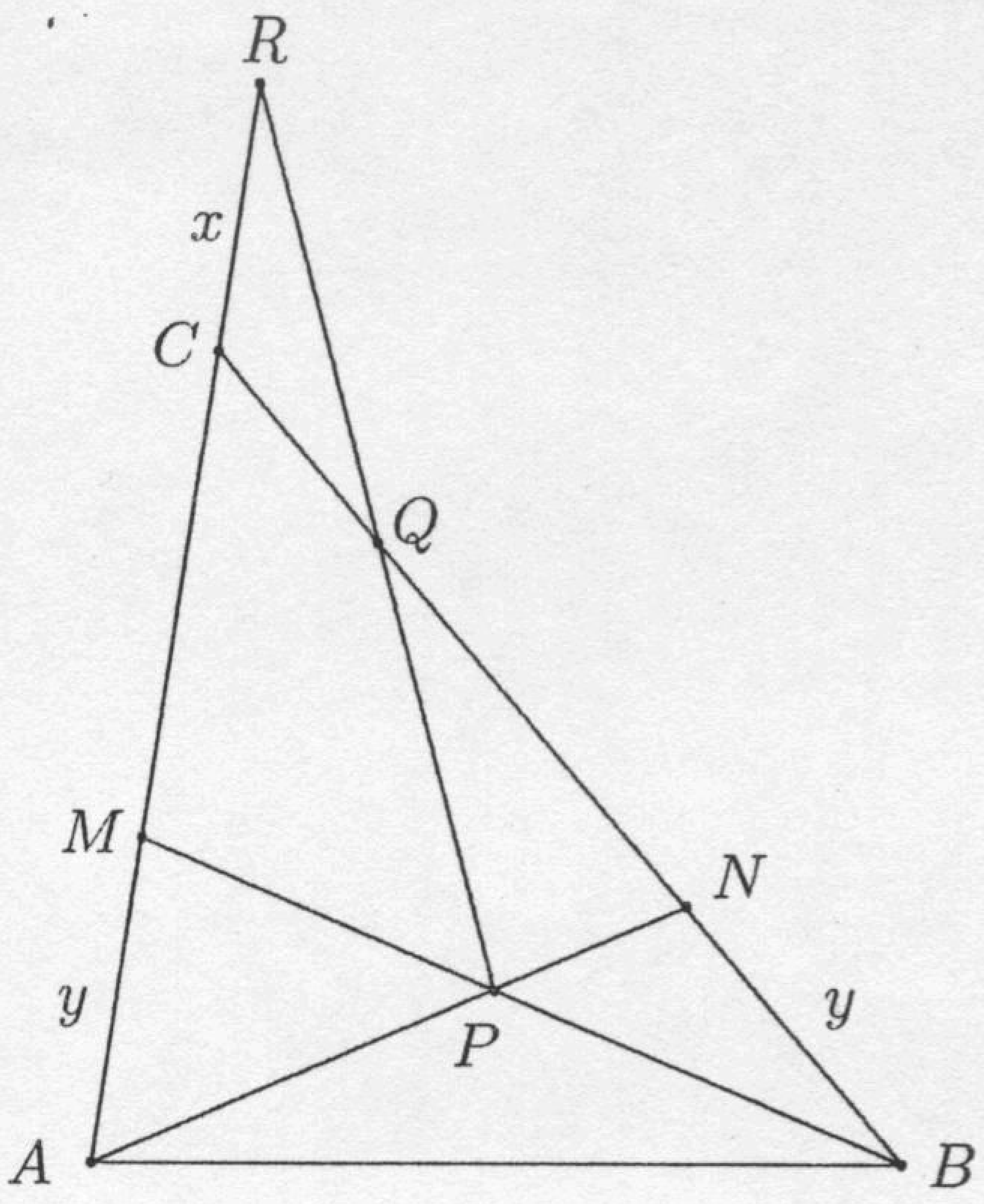
Нека правата PQ пресича правата AC в точка R и $x = CR$. От теоремата на Менелай за $\triangle ANC$ и правите PR и BM имаме съответно

$$\frac{AP}{PN} \cdot \frac{NQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RA} = 1, \quad \frac{AP}{PN} \cdot \frac{NB}{BC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1.$$

Приравнявайки левите страни на горните равенства и използвайки, че $CM = NQ$ и $AM = BN$, получаваме

$$\frac{1}{a-b} \cdot \frac{x}{x+b} = \frac{1}{a}.$$

Оттук $x = a - b$, т.е. $CQ = CR$. Следователно $\angle CRQ = \gamma/2$ и правата PQ е успоредна на ъглополовящата през върха C.



Задача 10.3. Нека k и n са естествени числа. Означаваме с $\lambda(k, n)$ броя на представянията на k във вида

$$k = a_0 + a_1.2 + a_2.2^2 + \cdots + a_{n-1}.2^{n-1},$$

където $a_i \in \{-1, 0, +1\}$.

а) Да се намери $\lambda(2^i, n)$, където $0 \leq i \leq n-1$.

б) Да се намери $\lambda(2^i - 1, n)$, където $0 \leq i \leq n$.

Решение. а) От равенството $2^i = a_0 + a_1.2 + a_2.2^2 + \cdots + a_{n-1}.2^{n-1}$ следва, че $a_0 = a_1 = \cdots = a_{i-1} = 0$. Нека j е най-големият индекс, за който $a_j \neq 0$. Тогава $a_j = 1$ и имаме единствено представяне

$$2^i = -2^i - 2^{i+1} - \ldots - 2^{j-1} + 2^j.$$

Тъй като $j \in \{i, i+1, \ldots, n-1\}$, заключаваме, че $\lambda(2^i, n) = n - i$.

б) Лесно се съобразява, че за нечетни m е в сила рекурентната връзка

$$\lambda(m,n)=\lambda\left(\frac{m-1}{2},n-1\right)+\lambda\left(\frac{m+1}{2},n-1\right).$$

Оттук получаваме

$$\begin{aligned}
\lambda(2^i-1,n) &= \lambda(2^{i-1}-1,n-1)+\lambda(2^{i-1},n-1)\\
\lambda(2^{i-1}-1,n-1) &= \lambda(2^{i-2}-1,n-2)+\lambda(2^{i-2},n-2)\\
\lambda(2^{i-2}-1,n-2) &= \lambda(2^{i-2}-1,n-3)+\lambda(2^{i-3},n-3)\\
\dots\quad & \dots\quad \dots\\
\lambda(2^2-1,n-(i-2)) &= \lambda(2-1,n-(i-1))+\lambda(2,n-(i-1))\\
\lambda(1,n-(i-1)) &= n-i+1.
\end{aligned}$$

Сумирайки горните равенства и отчитайки резултата от точка а), получаваме $\lambda(2^i-1,n)=i(n-i)+1$.

Забележка. Ако $2^i-1=a_0+a_1.2+a_2.2^2+\cdots+a_{n-1}.2^{n-1}$, то числото a_0 е нечетно и от равенството $\dfrac{2^i-1-a_0}{2}=a_1+a_2.2^1+\cdots+a_{n-1}.2^{n-2}$ следва, че $\lambda(2^i-1,n)=\lambda(2^{i-1}-1,n-1)+\lambda(2^{i-1},n-1)=\lambda(2^{i-1}-1,n-1)+n-i$. Продължавайки по същия начин (или прилагайки индукция), достигаме до $\lambda(2^i-1,n)=i(n-i)+1$.

Задача 10.4. Да се докаже, че уравнението $x^7+92=y^2$ няма решение в цели числа.

Решение. Да допуснем, че уравнението има решение в цели числа. Очевидно x и y са с еднаква четност. Ако са четни, $x=2x_1$ и $y=2y_1$, където x_1 и y_1 са цели числа, то $32x_1^7+23=y_1^2$, което е невъзможно по модул 4. Следователно x и y са нечетни. Да отбележим, че можем да считаме, че x и y са естествени числа (от $x^7=y^2-92\geq -92$ следва, че $x\geq -1$ и случаите $x=-1$ и $x=0$ се проверяват директно).

Да представим уравнението във вида

$$x^7+128=y^2+36 \iff (x+2)M=y^2+6^2,$$

където $M=x^6-2x^5+4x^4-8x^3+16x^2-32x+64$. Очевидно M е естествено число. Освен това $M\equiv x^6-2x^5\equiv 3 \pmod 4$ и следователно M има прост делител $p\equiv 3 \pmod 4$. Тогава p дели y^2+6^2, което означава, че p дели y и p дели 6, т.е. $p=3$.

От друга страна, не е трудно да се провери, че $M \equiv 1 \pmod 3$. Полученото противоречие показва, че даденото уравнение няма решение в цели числа.

Задача 11.1. Дадени са различни цели числа a, b и c, които образуват аритметична прогресия. Същите числа, евентуално в някакъв друг ред, образуват геометрична прогресия. Да се докаже, че $a^2 + b^2 + c^2$ се дели на 21.

Решение. От условието имаме $a + c = 2b$. Тъй като числата образуват геометрична прогресия, ако едно от тях е равно на нула, то и другите две числа са нули, което е противоречие с условието. В зависимост от подредбата на числата в геометричната прогресия, имаме $b^2 = ac$, $a^2 = bc$ или $c^2 = ab$, като последните два случая са аналогични. Ако $b^2 = ac$, то $(a+c)^2 = 4b^2 = 4ac$, откъдето $(a-c)^2 = 0$, т.е. $a = c$. Оттук $a = b = c$, което е противоречие с условието.

Когато $a^2 = bc$ получаваме $a + \dfrac{a^2}{b} = 2b$, откъдето $a^2 + ab - 2b^2 = 0$. Решенията на това хомогенно уравнение са $a = b$ (което е противоречие с условието) и $a = -2b$. Следователно $c = 2b - a = 4b$ и тогава сборът $a^2 + b^2 + c^2 = 21b^2$ се дели на 21.

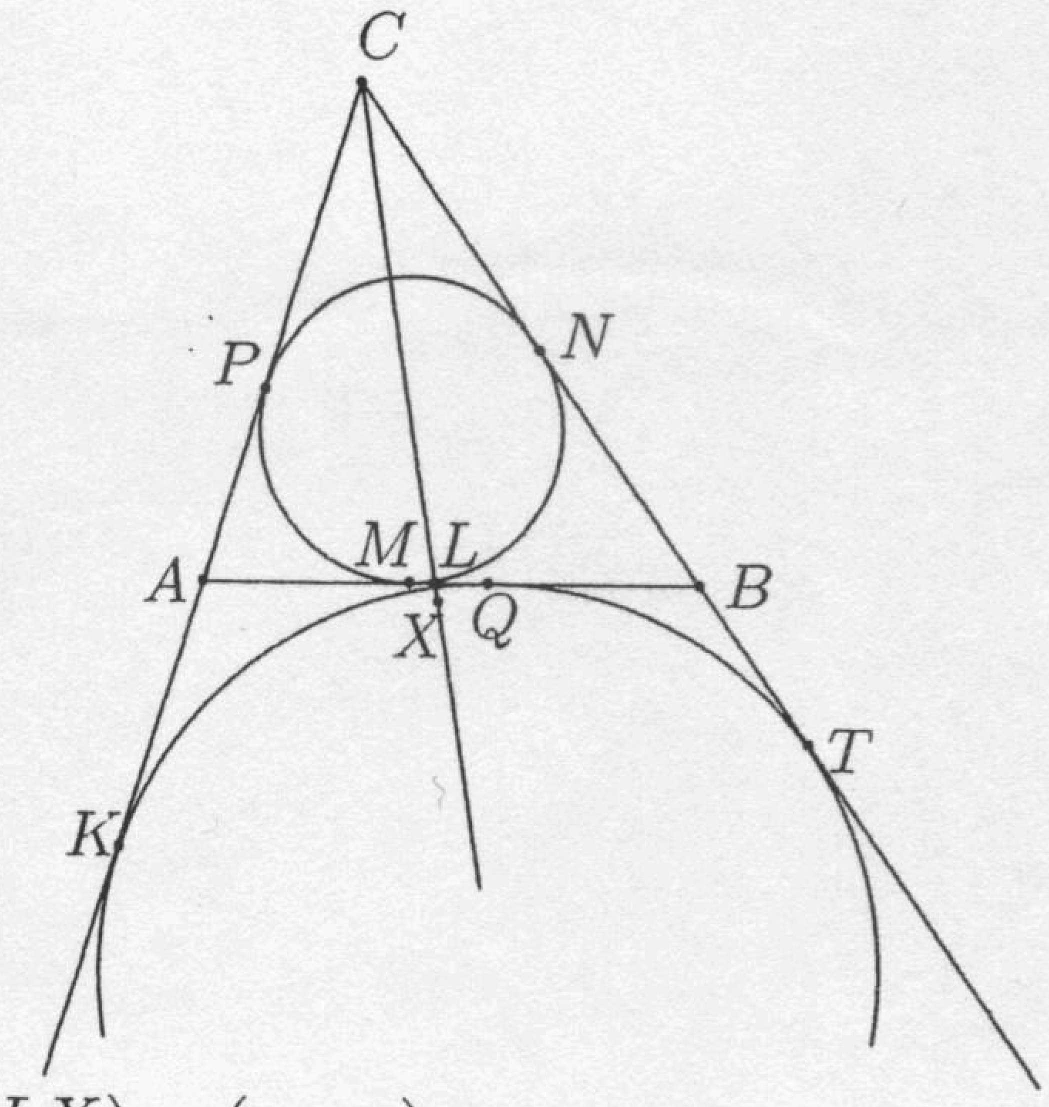
Задача 11.2. Даден е $\triangle ABC$ с ъглополовяща CL ($CA \neq CB$, $L \in AB$). Вписаната в триъгълника окръжност се допира до страните AB, BC и CA съответно в точки M, N и P, а външновписаната откъм AB окръжност се допира до AB и продълженията на CA и CB съответно в точки Q, K и T. Нека k_1, k_2 и k_3 са описаните окръжности съответно около $\triangle PKL$, $\triangle NTL$ и $\triangle CMQ$.

а) Да се докаже, че втората пресечна точка на k_1 и k_2 лежи на правата CL.

б) Да се докаже, че k_1, k_2 и k_3 се пресичат в една точка.

Решение. а) При осева симетрия с ос правата CL точките P и N са симетрични, както и точките K и T. Следователно k_1 и k_2 също са симетрични, откъдето следва твърдението.

б) Нека X е втората пресечна точка на k_3 и правата CL. Съгласно а) е достатъчно да докажем, че k_1 минава през X, което е еквивалентно на $CL.CX = CP.CK$. При стандартните означения за триъгълник, като използваме равенството $CL.LX = ML.LQ$ и формулата за ъглополовящата $CL^2 = ab - AL.BL$, получаваме последователно



$$
\begin{aligned}
CL.CX = CP.CK \quad &\Longleftrightarrow \quad CL(CL + LX) = (p-c)p \\
&\Longleftrightarrow \quad CL^2 + ML.LQ = (p-c)p \\
&\Longleftrightarrow \quad CL^2 + [LA - (p-a)]\,[LB - (p-a)] = (p-c)p \\
&\Longleftrightarrow \quad CL^2 + LA.LB - c(p-a) + (p-a)^2 = (p-c)p \\
&\Longleftrightarrow \quad ab - cp + ac + p^2 - 2ap + a^2 = p^2 - pc \\
&\Longleftrightarrow \quad a(a+b+c) = 2ap,
\end{aligned}
$$

което е очевидно вярно.

Задача 11.3. Дадени са $2n$ външно неразличими монети. Известно е, че n от тях имат едно и също тегло a, а останалите n монети също са с едно и също тегло b, като $a < b$. Разполагаме с кантар, с който можем да претеглим общото тегло на кои да са n от монетите. Да се докаже, че с $n+1$ претегляния с този кантар можем да намерим a и b.

Решение. Нека $a_1, a_2, \dots, a_{2n}$ са дадените монети и на i-тото, $i = 1, 2, \dots, n+1$ претегляне да поставим на кантара монетите $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_{n+i-1}$. Да означим общото тегло на монетите $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ с A. При всяко претегляне кантара ще показва две възможни тегла: $A + a$ или $A + b$ в зависимост от теглото на монетата a_{n+i-1}. Тъй като измежду монетите $a_n, a_{n+1}, \dots, a_{2n}$ има и от двата вида, то $p > 0$ от претеглянията са дали един и същи резултат x, а останалите $q = n + 1 - p > 0$ претегляния са дали резултат y и без ограничение $x < y$. Това означава, че измежду монетите $a_n, a_{n+1}, \dots, a_{2n}$ има точно p монети с тегло a и q монети с тегло b. Следователно измежду монетите $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ има $n-p$ с тегло a и $n-q$ с тегло b. Следователно $(n-p)a + (n-q)b + a = x$ и $(n-p)a + (n-q)b + b = y$. Използвайки, че

$n = p+q-1$ получаваме системата: $\left| \begin{array}{l} qa + (p-1)b = x \\ (q-1)a + pb = y, \end{array} \right.$ откъдето

$a = \dfrac{(x-y)p+y}{n}$ и $b = \dfrac{(y-x)q+x}{n}$.

Задача 11.4. Нека $n_0, n_1, \dots, n_{2008}$ са дадени естествени числа, а M е множеството от всички полиноми $f(x) = a_0x^{2008} + a_1x^{2007} + \dots + a_{2007}x + a_{2008}$, такива че за всяко i, $0 \le i \le 2008$, имаме $a_i \in \{1, 2, \dots, n_i\}$. Да се определи кои полиноми от M са повече: тези, на които всички корени са цели числа или тези, които нямат нито един реален корен.

Решение. Нека $f(x) \in M$ и всички негови корени са цели числа. Понеже полиномите от M нямат неотрицателни корени, то $f(x) = a_0(x+\alpha_1)(x+\alpha_2)\dots(x+\alpha_{2008})$, като α_i са естествени числа, които без ограничение можем да считаме наредени по големина: $\alpha_1 \le \alpha_2 \le \dots \le \alpha_{2008}$. Разглеждаме полинома

$$\begin{aligned} f^\star(x) \;=\;& a_0[x^{2008} + \alpha_1 x^{2007} + (\alpha_1\alpha_{1005}+1)x^{2006} + \alpha_1\alpha_2 x^{2005} + \\ &+(\alpha_1\alpha_2\alpha_{1005}\alpha_{1006}+1)x^{2004} + \dots + \\ &+(\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{1003}\alpha_{1005}\dots\alpha_{2007}+1)x^2 + \\ &+\alpha_1\alpha_2\alpha_{1004}x + \alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{1004}\alpha_{1005}\dots\alpha_{2008}]. \end{aligned}$$

Можем да представим $f^\star(x)$ като сума от тричлени от вида

$$x^{2k} + \alpha_1\alpha_2\dots\alpha_t x^{2k-1} + (\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_t\alpha_{1005}\dots\alpha_{1004+t})x^{2k-2}.$$

След изнасяне на x^{2k-2} пред скоби, получаваме квадратен тричлен с дискриминанта $D = \alpha_1\dots\alpha_t\,[\alpha_1\dots\alpha_t - 4\alpha_{1005}\dots\alpha_{t+1004}]$, като от наредбата на корените следва, че $D < 0$. Това означава, че $f^\star(x)$ няма реални корени, понеже $f^\star(x) > 0$ за всяко x. Освено това от формулите на Виет лесно се вижда, че ако $f(x) \in M$, то $f^\star(x) \in M$. Също така ако $f(x) \ne g(x)$, $f, g \in M$, то $f^\star(x) \ne g^\star(x)$, защото иначе според принципа за сравняване на коефициентите, ще получим, че $f(x)$ и $g(x)$ имат едни и същи корени и старши коефициенти, т.е. $f(x) \equiv g(x)$.

При това съпоставяне очевидно полинома $x^{2008} + x^{2007} + \dots + x + 1$ не е съпоставен на никой, а той е от M и няма реални корени. Следователно полиномите от M, които нямат нито един реален корен са повече от полиномите от M, на които всички корени са цели числа.

Задача 12.1. Да се намерят стойностите на реалния параметър a, за които неравенството

$$\log_{\frac{a+1}{a-1}}(x^2 - x + 1) < 1$$

е изпълнено за всяко x.

Решение. Първо ще отбележим, че $x^2 - x + 1 \geq \frac{3}{4}$ за всяко x, защото това неравенство е еквивалентно на $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$. Следователно при всяко x даденото неравенство има смисъл при $\frac{a+1}{a-1} > 0$.

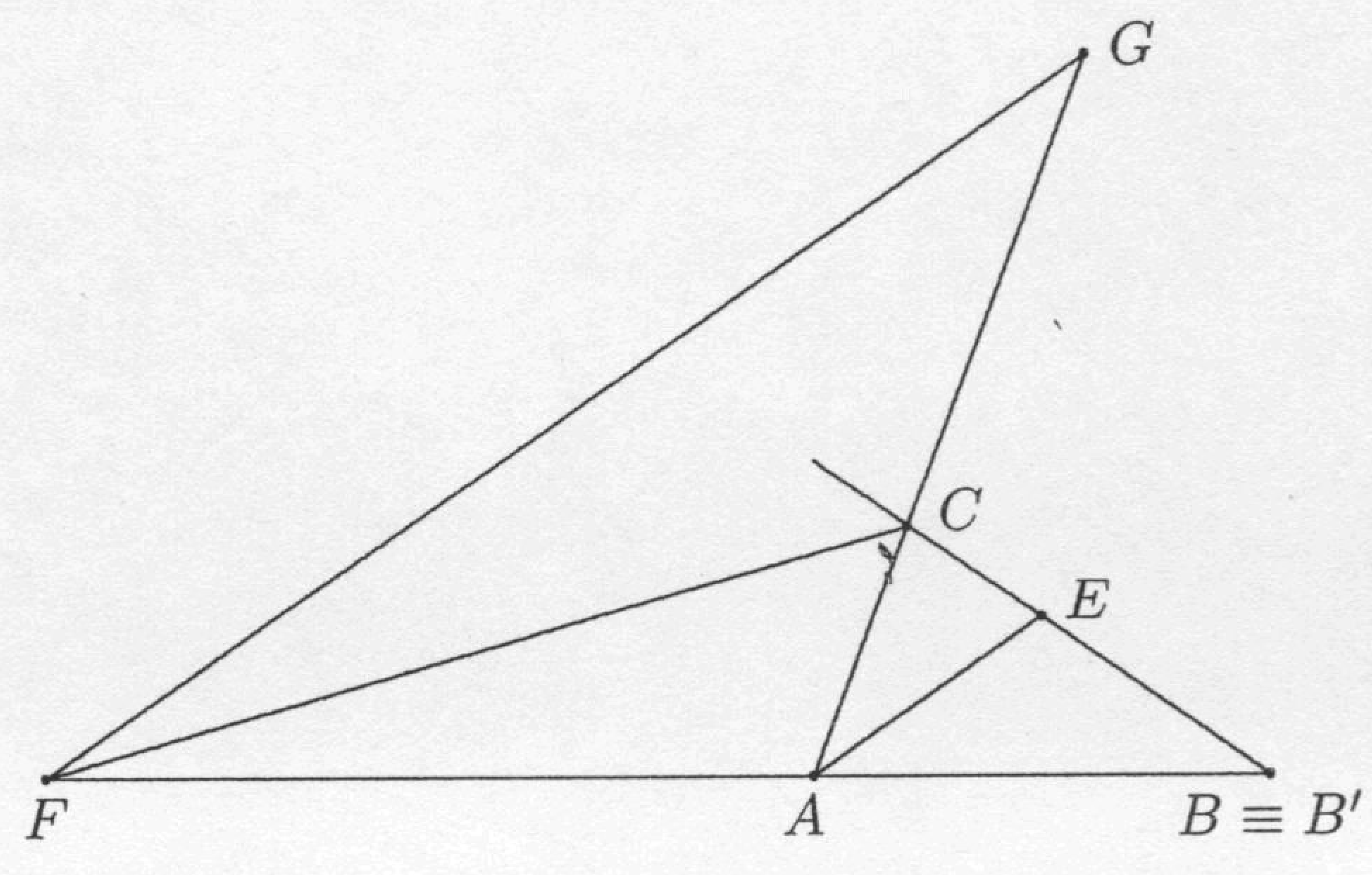
Нека $0 < \frac{a+1}{a-1} < 1$. Тогава $x^2 - x + 1 > \frac{a+1}{a-1} > 0$ за всяко x. Това е изпълнено тогава и само тогава, когато $\frac{a+1}{a-1} < \frac{3}{4}$, т.е. $0 < \frac{a+1}{a-1} < \frac{3}{4}$. Оттук $a \in (-7, -1)$.

Ако $0 < \frac{a+1}{a-1} > 1$, то $x^2 - x + 1 < \frac{a+1}{a-1}$ за всяко x, което е невъзможно.

Следователно $a \in (-7, -1)$.

Задача 12.2. Ъглополовящата на $\angle BAC$ в $\triangle ABC$ пресича страната BC в точка E, а външната ъглополовяща на $\angle ACB$ пресича лъча $BA^{\rightarrow}$ в точка F. Ако дължината на отсечката AF е равна на периметъра на $\triangle ACE$, да се намери отношението $\angle BAC : \angle ABC$.

Решение. Нека точката G от лъча $AC^{\rightarrow}$ е такава, че $AG = AF$. Тогава $\angle AGF = \angle BAC/2 = \delta$. Нека сега точката B' от лъча $EB^{\rightarrow}$ е такава, че $EB' = AE$. Тогава $CB' = CG$ и понеже $\angle FCB' = \angle FCG$, то $\triangle FCB' \cong \triangle FCG$ по първи признак. Следователно $\angle CB'F = \delta$. Ако B' е между E и B, то $\angle CB'F < \angle CB'A = \angle EAB' < \delta$, противоречие.



Ако пък B е между E и B', то $\angle CB'F > \angle CB'A = \angle EAB' > \delta$, което отново е противоречие. И така, $B' = B$, т.е. $\angle BAC = 2\angle ABC$.

Забележка. Възможно е и решение с тригонометрия.

Задача 12.3. Нека $f_k(x) = \dfrac{1}{k}\left(\sin^k x + \cos^k x\right)$. Да се намерят всички естествени числа m и n, $m \neq n$, за които функцията $f_m(x) - f_n(x)$ е константа.

Решение. Нека $m < n$ и $f_m(x) - f_n(x) = c$ за всяко $x \in R$. Като положим $x = 0$ и $x = \pi$ получаваме $\dfrac{1}{m} - \dfrac{1}{n} = c$ и $\dfrac{(-1)^m}{m} - \dfrac{(-1)^n}{n} = c$. Оттук и $m \neq n$ лесно следва, че m и n са четни числа. Нека $m = 2p$ и $n = 2q$. Сега полагаме $x = \dfrac{\pi}{4}$ и получаваме, че

$$(\star) \qquad \frac{1}{2p} - \frac{1}{2q} = c = \frac{1}{p2^p} - \frac{1}{q2^q}.$$

Ако $p = 1$, то от $(\star)$ следва, че $q = 1$. Тогава $m = n = 2$, което противоречи на условието $m \neq n$. Следователно $p \geq 2$ и $(\star)$ може да се запише във вида $\dfrac{q2^q}{p2^p} = \dfrac{2^q - 2}{2^p - 2}$. Нека $q = p + k$, където k е естествено число. Тогава горното равенство може да се запише във вида

$$(\star\star). \qquad k2^k = (2^{k+1} - 2)\frac{p}{2^p - 2}$$

Тъй като $k2^k \geq 2^{k+1} - 2$, то $\dfrac{p}{2^p - 2} \geq 1$, т.е. $p \geq 2^p - 2$. По индукция лесно следва, че $2^p - 2 > p$ при $p \geq 3$ и следователно $p = 2$. Тогава от $(\star\star)$ следва, че $k2^k = 2^{k+1} - 2$, т.е. $k = 1$. Оттук $q = 3$ и заключаваме, че $m = 4$, $n = 6$. Остава да докажем, че тези естествени числа изпълняват условието. Наистина, в този случай

$$\begin{aligned} f_4(x) &= \frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{4} = \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x}{4} \\ &= \frac{1}{4} - \frac{\sin^2 x \cos^2 x}{2} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} f_6(x) &= \frac{\sin^6 x + \cos^6 x}{6} = \frac{1}{6}(\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x) \\ &= \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 3\sin^2 x \cos^2 x}{6} = \frac{1}{6} - \frac{\sin^2 x \cos^2 x}{2}. \end{aligned}$$

Следователно $f_4(x) - f_6(x) = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$.

Окончателно, търсените числа са $m = 4$, $n = 6$ или $m = 6$, $n = 4$

Задача 12.4. Нека $\mathbb{R}^+$ е множеството на реалните положителни числа.

а) Да се построи пример на функция $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, която има следното свойство:

$$2f(x^2) \geq xf(x) + x \text{ за всяко } x > 0.$$

б) Да се докаже, че ако $f(x)$ има свойството от а), то $f(x^3) \geq x^2$ при $x > 0$.

Решение. а) Например функцията $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ при } x \leq 1 \\ x \text{ при } x \geq 1 \end{cases}$ има исканото свойство.

б) Очевидно $f(x^2) > x/2$. Да предположим, че $f(x) > x^{a_n}/2^{1/2^n}$ за всяко $x > 0$ $(a_0 = 1/2)$. Понеже $f(x^2) \geq x\sqrt{f(x)}$, то

$$f(x) \geq \sqrt{x}\sqrt{f(\sqrt{x})} > x^{\alpha_{n+1}}/2^{1/2^{n+1}}$$

където $a_{n+1} = 1/2 + a_n/4$. Сега от $a_{n+1} - 2/3 = (a_n - 2/3)/4$ следва, че $a_n \to 2/3$. Понеже $2^{1/2^n} \to 1$, заключаваме, че $f(x) \geq x^{2/3}$ при $x > 0$.

Задачите са предложени от:

Иван Тонов - 9.1, 9.3; Чавдар Лозанов - 9.2, 9.4; Иван Ланджев - 10.1, 10.3; Хаим Хаимов - 10.2; Петър Бойваленков - 10.4; Емил Колев - 11.1, 11.3; Александър Иванов - 11.2, 11.4; Олег Мушкаров - 12.1, 12.3; Николай Николов - 12.2, 12.4.

Брошурата е подготвена от Емил Колев