Министерство на Образованието и Науката
Съюз на Математиците в България

Зимни Математически Състезания
Плевен, 3–5 февруари, 2006 г.

Задача 9.1. Да се намерят всички стойности на реалните неотрицателни параметри a и b, за които уравненията $x^2 + a^2x + b^3 = 0$ и $x^2 + b^2x + a^3 = 0$ имат общ реален корен.

Решение: Ако x_0 е общ корен на двете уравнения, то

$$x_0(a^2 - b^2) = a^3 - b^3.$$

Случай 1. При $a \neq b$ получаваме $x_0 = \dfrac{a^2 + ab + b^2}{a + b}$. Тъй като очевидно $x_0 > 0$, заместването в първото уравнение ще даде $x_0^2 + a^2x_0 + b^3 > 0$, което е невъзможно. Следователно в този случай задачата няма решение.

Случай 2. При $a = b$ двете уравнения съвпадат и трябва само да проверим кога имат реални корени. Дискриминантата е $D = a^4 - 4a^3 = a^3(a - 4)$, като $a = 0$ е решение, а при $a > 0$ неравенството $D \geq 0$ е еквивалентно на $a \geq 4$. Следователно решенията на задачата са всички двойки (a, a), където $a \in \{0\} \cup [4, +\infty)$.

Задача 9.2. Нека b и c са реални параметри, за които квадратното уравнение $x^2 + bx + c = 0$ има два реални различни корена x_1 и x_2, такива, че $x_1 = x_2^2 + x_2$.

а) Да се намерят параметрите b и c, ако $b + c = 4$.

б) Да се намерят параметрите b и c, ако те са цели взаимнопрости числа.

Решение: Като използваме условието $x_1 = x_2^2 + x_2$, равенството $x_2^2 + bx_2 + c = 0$ и формулите на Виет, получаваме системата

$$\left|\begin{array}{rcr} x_1 + (b-1)x_2 & = & -c \\ x_1 + x_2 & = & -b \\ x_1x_2 & = & c \end{array}\right. ,$$

откъдето $c^2 + 4(1 - b)c + b^3 - b^2 = 0$, $b \neq 2$.

а) Заместваме $c = 4-b$ и получаваме $b^3+4b^2-28b+32 = 0 \iff (b-2)^2(b+8) = 0$. Следователно $b = -8$, откъдето намираме двойката $(b, c) = (-8, 12)$.

б) Да разгледаме равенството $c^2+4(1-b)c+b^3-b^2 = 0$ като квадратно уравнение относно c. Тъй като c е цяло число, дискриминантата $D = 16(1 - b)^2 - 4(b^3 - b^2) = 4(1-b)(b-2)^2$ трябва да бъде точен квадрат. Следователно $b = 2$ или $1-b = k^2$, където k е цяло число. Получаваме класа от решения $(b, c) = (1 - k^2, k(k - 1)^2)$, които са взаимнопрости само при $k - 1 = \pm 1$. Тогава $k = 2$ или $k = 0$, откъдето $(b, c) = (-3, 2)$ и $(1, 0)$. И в двата случая корените на даденото уравнение са реални и различни.

Задача 9.3. Даден е $\triangle ABC$. Нека BL, $L \in AC$, е ъглополовяща на $\sphericalangle ABC$, а AH, $H \in BC$, е височината на триъгълника през върха A. Да се докаже, че $\sphericalangle AHL = \sphericalangle ALB$ тогава и само тогава, когато $\sphericalangle BAC = \sphericalangle ACB + 90^\circ$.

Решение: ($\Rightarrow$) Нека $\sphericalangle AHL = \sphericalangle ALB = \varphi$ и I е центърът на вписаната в $\triangle ABH$ окръжност. Тогава $\sphericalangle AHI = \frac{1}{2} \sphericalangle AHB = 45^\circ$ и $\sphericalangle AIL = 180^\circ - \sphericalangle AIB = 45^\circ$. Оттук

$$\begin{aligned} \sphericalangle LAI + \sphericalangle LHI &= (180^\circ - \sphericalangle ALI - \sphericalangle AIL) + (\sphericalangle AHL + \sphericalangle AHI) \\ &= (180^\circ - \varphi - 45^\circ) + (\varphi + 45^\circ) = 180^\circ. \end{aligned}$$

Следователно четириъгълникът $AIHL$ е вписан в окръжност, откъдето $\varphi = 45^\circ$. Сега имаме $\sphericalangle BAC = 90^\circ + \sphericalangle BAI = 90^\circ + \frac{1}{2}(90^\circ - \sphericalangle ABC)$. Замесвайки в последното равенство $\sphericalangle ABC = 180^\circ - \sphericalangle BAC - \sphericalangle ACB$, получаваме

$$\sphericalangle BAC = \sphericalangle ACB + 90^\circ.$$

($\Leftarrow$) Ще използваме стандартните означения за ъглите в $\triangle ABC$. Нека $\alpha = 90^\circ + \gamma$. Тогава лесно се вижда, че AL е външна ъглополовяща за $\triangle ABH$. Следователно L е центърът на външновписаната окръжност за $\triangle ABH$ към страната AH. Сега имаме $\sphericalangle AHL = \frac{1}{2} \sphericalangle CHA = 45^\circ$. От друга страна,

$$\begin{aligned}
\sphericalangle ALB &= 180^\circ - \sphericalangle BAL - \sphericalangle ABL \\
&= 180^\circ - \alpha - \frac{\beta}{2} \\
&= 180^\circ - \alpha - \frac{180^\circ - \alpha - \gamma}{2} \\
&= 90^\circ - \frac{\alpha - \gamma}{2} = 45^\circ.
\end{aligned}$$

Следователно $\sphericalangle AHL = \sphericalangle ALB$.

Задача 9.4. В клетките на таблица с размер 8×8 са разположени пулове, като са спазени следните правила:

(1) В поне едно от полетата на всеки правоъгълник с размер 2×1 или 1×2 има поне един пул.

(2) За всеки правоъгълник с размер 7×1 или 1×7 има поне два пула, които са разположени в съседни полета.

Да се намери минималния възможен брой пулове.

Решение: От фиг. 1 следва, че е възможно да разположим 37 пула при изпълнени условия (1) и (2). Ще докажем, че 37 е търсеният минимален брой.

От (1) следва, че всеки стълб на таблицата съдържа поне по 4 пула. Да разгледаме стълбовете на таблицата 6×6, получена от дадената след отрязване на крайните редове и стълбове. От (1) следва, че всеки такъв стълб съдържа поне три пула.

	•		•		•	•	
•		•		•	•		•
	•		•	•		•	
•		•	•		•		•
	•	•		•		•	•
•	•		•		•	•	
•		•		•	•		•
	•		•	•		•	

Фиг. 1

В никой от стълбовете 6×1 с три пула не е възможно тези пулове да са през едно поле, защото тогава за съответния стълб в голямата таблица не е изпълнено (2). Следователно в стълбовете с по три пула тези три пула са разположени във второ, трето и пето или във второ, четвърто и пето поле.

Да означим с k броя на стълбовете с по 3 пула. Останалите $6 - k$ малки стълба и двата крайни големи стълба съдържат поне по 4 пула. Да отбележим още, че от (1) следва, че стълбовете от голямата таблица, които съдържат стълбове от малката с по 3 пула, задължително съдържат по 5 пула.

Да допуснем, че два стълба с по три пула са съседни. Тогава съседните им първи полета образуват правоъгълник 2×1, в който няма пул – противоречие. Тъй като разглеждаме общо 6 стълба, най-много 3 от тях съдържат по 3 пула, т.е. $k \leq 3$.

Да разгледаме двата правоъгълника 6×1, разположени под и над малката таблица. Имаме две възможности:

Случай 1. Ако един от тези правоъгълници съдържа не повече от 3 пула, то в крайните стълбове на голямата таблица има поне по 5 пула и следователно в цялата таблица има поне $5k + 2 \cdot 5 + 4(6 - k) + 2(3 - k) = 40 - k \geq 37$ пула.

Случай 2. Ако и двата правоъгълника съдържат поне по 4 пула, общият брой на пуловете е поне $5k + 4(8 - k) + 2(4 - k) = 40 - k \geq 37$.