**Министерство на образованието и науката**
**Съюз на математиците в България**

# Зимни математически състезания
# Варна, 9 – 11 февруари 2007 г.

**Задача 9.1.** Да се намерят всички стойности на реалния параметър $p$, за които уравнението $x^2 + (p^2 + 1)x + p = 2$ има два различни реални корена $x_1$ и $x_2$ такива, че

$$\frac{2x_1 - 1}{x_2} + \frac{2x_2 - 1}{x_1} = x_1 x_2 + \frac{55}{x_1 x_2}.$$

**Решение.** По формулите на Виет $x_1 + x_2 = -(p^2 + 1)$ и $x_1 x_2 = p - 2 \neq 0$. Даденото условие е еквивалентно на $2x_1^2 - x_1 + 2x_2^2 - x_2 = x_1^2 x_2^2 + 55$, откъдето лесно получаваме $2p^4 + 4p^2 - 48 = 0$. Това биквадратно уравнение има два реални корена, $p_1 = 2$ и $p_2 = -2$, но първият от тях дава $x_1 x_2 = 0$, което е невъзможно. При $p = -2$ получаваме уравнението $x^2 + 5x - 4 = 0$, чиито корени наистина са реални.

**Задача 9.2.** В $\triangle ABC$, $AB > BC$, точка $K$ от страната $AB$ е такава, че $AK = BC + BK$. Права $\ell$ минава през $K$ и е перпендикулярна на $AB$. Да се докаже, че $\ell$, симетралата на $AC$ и външната ъглополовяща при върха $B$ се пресичат в една точка.

**Решение. Първи начин.** Нека точка $C' \in \overrightarrow{AB}$ е такава, че $BC = BC'$. Тогава външната ъглополовяща на $\sphericalangle B$ е симетралата на $CC'$. Тъй като $AK = BC + BK = BC' + BK = KC'$, то $\ell$ е симетралата на $AC'$. Получихме, че $\ell$, симетралата на $AC$ и външната ъглополовяща при върха $B$ представляват симетрали на страните на $\triangle AC'C$ и следователно се пресичат в центъра на описаната около този триъгълник окръжност.

**Втори начин.** Нека $k$ е описаната около $\triangle ABC$ окръжност и $P$ е средата на дъгата $AC$, съдържаща точка $B$. Тогава симетралата на $AC$ и външната ъглополовяща при върха $B$ минават през точка $P$ и остава да докажем, че $\ell$ също минава през $P$.

Нека $K' \in AB$ е такава, че $PK' \perp AB$. Достатъчно е да покажем, че $AK' = BC + BK'$. Нека $PM \perp BC$, $M \in BC$. Тогава $B$ е между $C$ и $M$, $BM = BK'$ поради свойството на ъглополовящата и следователно $BC + BK' = CB + BM = CM$. От друга страна, $\triangle AK'P \cong CMP$ ($AP = CP$, $PK' = PM$ и $\sphericalangle AK'P = \sphericalangle CMP = 90^\circ$), откъдето $AK' = CM = BC + BK'$.

**Задача 9.3.** Някои от полетата на квадратна таблица $n \times n$ са минирани. Във всяко поле е записано цяло число от 0 до 9, равно на броя на минираните полета сред това поле и съседните му (тези, които имат обща страна или връх с него). Винаги ли е възможно по тази информация да се определи кои полета са минирани, ако:

а) $n = 2000$; б) $n = 2007$?

**Решение.** Да номерираме редовете $i = 1, \ldots, n$ и стълбовете $j = 1, \ldots, n$ и да означим с $a(i; j)$ числото в поле $(i; j)$, където $i$ е номерът на реда, а $j$ е номерът от стълба.

а) Не! Да разгледаме таблица $A$, в която са минирани полетата, за които $i \equiv j \equiv 1 \pmod 3$, и таблица $B$, в която са минирани полетата, за които $i \equiv j \equiv 2 \pmod 3$. Тогава във всички полета на $A$ и $B$ е записано числото 1 и тази информация не е достатъчна, за да разпознаем двете различни таблици.

б) Да! Първо да определим минираните полета в ред 3. Лесно се вижда, че броят $b(j)$ на минираните полета измежду $(3; j-1)$, $(3; j)$, $(3; j+1)$ е равен на $a(2; j) - a(1; j)$. Сравнявайки $b(1)$ и $b(2)$, откриваме дали (3;3) е минирано. Сега сравнявайки $b(4)$ и $b(5)$, откриваме дали (3;6) е минирано. Продължавайки по такъв начин, откриваме дали (3;9), (3;12), ..., (3;2007) са минирани.

Сравнявайки $b(2007)$ и $b(2006)$, откриваме дали (3;2005) е минирано. Сега сравнявайки $b(2004)$ и $b(2003)$, откриваме дали (3;2002) е минирано. Продължавайки по такъв начин, откриваме дали (3;1999), (3;1996), ..., (3;1) са минирани. Сега от $b(1)$ разбираме дали $(3; 2)$ е минирано. Сега сравнявайки $b(3)$ и $b(4)$, откриваме дали (3;5) е минирано. Продължавайки по такъв начин, откриваме дали (3;8), (3;11), ..., (3;2006) са минирани. Ред 3 стана известен.

По подобен начин можем да определим и минираните полета в ред 6. Сравнявайки $a(4;j)$ и $a(5;j)$ с вече известната информация от ред 3, можем да открием броя на минираните полета сред $(6;j-1)$, $(6;j)$, $(6;j+1)$. Следвайки схемата от ред 3, откриваме отляво надясно минираните полета, за които $j \equiv 0 \pmod 3$, отдясно наляво минираните полета, за които $j \equiv 1 \pmod 3$, и накрая отляво надясно минираните полета, за които $j \equiv 2 \pmod 3$. Ред 6 стана известен.

Аналогично определяме минираните полета на редовете $9, 12, 15, \dots, 2007$.

Започвайки от другата страна на таблицата, по подобен начин определяме минираните полета в редове $2005, 2002, 1999, \dots, 4, 1$. Накрая пак така определяме и тези в редове $2, 5, 8, \dots, 2006$.

**Забележка.** Отговорът е „не”, ако $n \equiv 2 \pmod 3$, и „да” в противен случай.

**Задача 9.4.** Да се намерят всички естествени числа $x$ и $y$, за които числото $(x^2+y)(y^2+x)$ е точна пета степен на просто число.

**Решение.** Нека $(x^2+y)(y^2+x) = p^5$, където $p$ е просто число. Тогава $x^2+y = p^s$, $y^2+x = p^t$, където $\{s,t\} = \{1,4\}$ или $\{2,3\}$. В първия случай без ограничение на общността можем да считаме, че $x^2+y=p$, $y^2+x=p^4$. Тогава $p > x^2$ и от $p | y(x^2+y)-(y^2+x) = x(xy-1)$ следва, че $p|xy-1$. Сега от $p|x(x^2+y)-(xy-1)$ заключаваме, че $p|x^3+1 = (x+1)(x^2-x+1)$, т.е. $p|x+1$ или $p|x^2-x+1$, което противоречи на $p > x^2$.

Нека $x^2+y=p^2$, $y^2+x=p^3$. Тогава $p > x$ и както по-горе виждаме, че $p|x+1$ или $p|x^2-x+1$.

*Случай 1.* Нека $p|x+1$. Тогава $p=x+1$ и лесно намираме решението $x=2$, $y=5$.

*Случай 2.* Нека $p|x^2-x+1$, но $p \nmid x+1$. Тогава $p|y^2-y+1$, но $p \nmid y+1$.

Имаме $p|x^2+y = (x^2-x+1)+(x+y-1)$, т.е. $p|x+y-1$. Да положим $x^2-x+1 = ap^m$, $y^2-y+1 = bp^n$ и $x+y-1 = cp^\ell$, където $(a,p)=(b,p)=(c,p)=1$, $a,b,c,m,n,\ell \in \mathbb{N}$. От $ap^m = x^2-x+1 < x^2+y = p^2$ следва, че $m=1$, и аналогично от $cp^\ell = x+y-1 < x^2+y = p^2$ следва, че $\ell = 1$. Тогава $p^2 = x^2+y = (a+c)p$, т.е. $a+c=p$.

Освен това, от $p^3 = y^2+x = y^2-y+1+x+y-1 = bp^n+cp$ заключаваме, че $n=1$ и $b+c=p^2$. Следователно $b-a = p^2-p$ и имаме

$$p^2(p-1) = (a-b)p = (x^2-x+1)-(y^2-y+1) = (x-y)(x+y-1) = cp(x-y),$$

което означава, че $p|x-y$. Оттук и от $p|x+y-1$ следва, че $p|2x-1$. Тогава от $p|x^2-x+1 = (x^2+x)-(2x-1)$ следва $p|x(x+1)$, противоречие.

Окончателно, решенията са $(2,5)$ и $(5,2)$.

**Забележка.** Може да се докаже, че $(x^2+y)(y^2+x)$ е точна степен на просто число само в горните случаи и при $x=y=1$.