МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
СЪЮЗ НА МАТЕМАТИЦИТЕ В БЪЛГАРИЯ
Зимни математически състезания
31 януари – 2 февруари 2014 г., БУРГАС

Условия, кратки решения и критерии за оценяване

Задача 9.1. Да се намерят всички стойности на реалния параметър a, за които системата

$$\left| \begin{array}{rcl} x^2 - 2y - 2z & = & a \\ y^2 - 2z - 2x & = & a \\ z^2 - 2x - 2y & = & a \end{array} \right.$$

има поне едно реално решение.

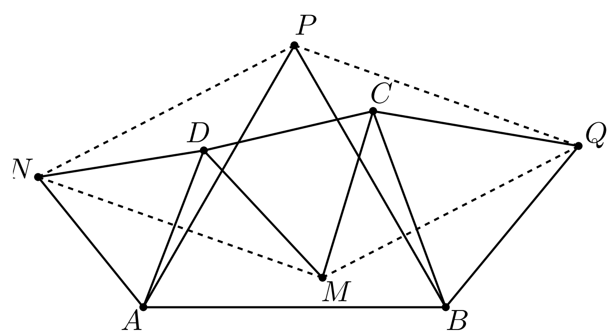
Решение. Събираме трите уравнения на дадената система и представяме полученото равенство във вида $(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 3a + 12$. Следователно $3a + 12 \geq 0 \iff a \geq -4$ е необходимо условие да имаме реално решение. Това условие е и достатъчно, защото при всяко $a \in [-4, +\infty)$ имаме решението, което се получава при $x - 2 = y - 2 = z - 2 = \sqrt{a+4}$.

Оценяване. (6 точки) 3 т. за достигане до извода, че $a \geq -4$, 3 т. за доказване на достатъчността на това условие (повечето решения ще бъдат с изваждане на уравнения и разглеждане на случаи).

Задача 9.2. Даден е изпъкнал четириъгълник D. Върху страните му AB и CD вътрешно за четириъгълника са построени равностранните триъгълници ABP и DCM, а върху страните му AD и BC външно за четириъгълника са построени равностранните триъгълници ADN и BCQ. Да се докаже, че точките M, N, P и Q са върхове на успоредник.

Решение. (**Първи начин**) Да разгледаме $\triangle APN$ и $\triangle ABD$. От условието следва, че $AP = AB$ и $AN = AD$. Освен това $\sphericalangle BAD = \sphericalangle PAN$ (и двата ъгъла са равни на $60^\circ + \sphericalangle PAD$ или на $60^\circ - \sphericalangle PAD$ в зависимост от това дали $\sphericalangle BAD$ е съответно по-голям или по-малък от 60°. Следователно $\triangle APN \cong \triangle ABD$, откъдето $NP = BD$. Аналогично се вижда, че $MQ = BD$ и следователно $MQ = NP$.

Аналогично се доказва, че $MN = PQ$, откъдето следва, че $MQPN$ е успоредник.



(**Втори начин**) Ротацията на ъгъл 60° с център A изпраща B в P и D в N, откъдето $BD = PN$. Аналогично $MQ = BD$ и след това $MQ = NP$ по същия начин.

Оценяване. (6 точки) 1 т. за разглеждане на подходящи триъгълници или подходяща ротация, 1 т. за доказване на $PN = BD$ (или друго еквивалентно), 2 т. за доказване на равенство на две срещуположни страни, 2 т. за довършване.

Задача 9.3. Да се намерят всички прости числа p и q и всички естествени числа $k > 1$, за които числата $p^k q + 1$ и $pq^k + 1$ едновременно са точни квадрати.

Решение. Нека $p^k q + 1 = x^2$ и $pq^k + 1 = y^2$, където $x, y \in \mathbb{N}$. Ако точно едно от числата p и q е равно на 2, например $p = 2$, а q е нечетно, то равенството $2q^k + 1 = y^2$ дава противоречие по модул 4. Ако $p = q = 2$, то от $2^{k-1} = (x-1)(x+1)$ следва, че $x - 1$ и $x + 1$ са степени на 2, което е възможно само при $x = 3$ и съответно $k = 2$.

Нека p и q са нечетни прости числа. Тогава x и y са четни и $(x-1, x+1) = (y-1, y+1) = 1$. От последното и от равенствата $p^k q = (x-1)(x+1)$ и $pq^k = (y-1)(y+1)$ следва, че имаме четири възможности.

При $p^k = x - 1$, $q = x + 1$, $q^k = y - 1$ и $p = y + 1$ получаваме $q - p^k = p - q^k = 2$, т.е. $p^k + p = q^k + q$ и значи $p = q$, което води до $p = 2$, противоречие. Същото се получава и при $p^k = x + 1$, $q = x - 1$, $q^k = y + 1$ и $p = y - 1$.

При $p^k = x - 1$, $q = x + 1$, $q^k = y + 1$ и $p = y - 1$ получаваме $q - p^k = q^k - p = 2$, т.е. $p + q = p^k + q^k$, което очевидно е невъзможно. Същото се получава и при $p^k = x + 1$, $q = x - 1$, $q^k = y - 1$ и $p = y + 1$.

Оценяване. (7 точки) 1 т. за решението $p = q = 2$, 2 т. за случая, когато точно едно от числата p и q е нечетно, 4 т. за нечетни p и q.

Забележка. По общата задача за произволна степен вместо квадрат се свежда до решаване на уравненията $p^{k+1} = 2^m - 1$ и $p^k q = 2^m - 1$, където m е просто число.

Задача 9.4. Лабиринт се състои от 10000 квадратни стаи, разположени във формата на квадрат 100×100. Всеки две стаи, които имат обща страна, са свързани с врата. Тезей се лута из лабиринта, като на всеки свой ход влиза в някоя стая през една от нейните врати и излиза през друга. При това, Тезей не може да използва една и съща двойка врати за две последователни посещения на една и съща стая (така например, ако при първото си посещение Тезей е влязъл в стаята през врата A и е излязъл през врата B, то при второто си посещение той не може да влезе през врата B и да излезе през врата A.) Възможно ли е Тезей да се лута в лабиринта в продължение на повече от 4^{100} хода?

Решение. Да номерираме редовете и стълбовете от стаи в лабиринта с числата от 1 до 100 и да означим всяка стая с наредената двойка от номерата на нейните ред и стълб.

Нека S е множеството на тези стаи (i, j), за които $1 \leq i \leq 50$ и $1 \leq j \leq 50$. Да разбием S на 99 по-малки множества S_2, S_3, ... S_{100}, така че S_k да се състои от тези стаи (i, j) в S, за които $i + j = k$ за $2 \leq k \leq 100$.

Нека P_k е общия брой посещения на стаи от S_k, направени от Тезей.

Множеството S_2 се състои от една стая; понеже тя има само две врати, имаме, че $P_2 \leq 1$.

Нека a е една произволна стая от S_k, $k > 2$. Понеже a има само две врати, които не водят към стая от S_{k-1}, поне едно от всеки две последователни посещения на a трябва или да се предхожда, или да се следва от посещение на стая от S_{k-1}. Понеже всяко посещение на стая от S_{k-1} може да предхожда или да следва най-много две посещения на стаи от S_k, оттук получаваме, че P_k не надвишава $k - 1$ (броя на стаите в S_k) $+ 4P_{k-1}$.

Оттук по индукция леко следва, че $P_k \leq 2^{2k-3} - k + 1$. Следователно, общият брой на посещенията на стаи от S не надвишава $S_2 + S_3 + ... + S_{100} \leq 2^1 + 2^3 + ... + 2^{197} = \frac{2^{198}-2}{3}$. Същата оценка можем да направим и за всеки от останалите три квадранта на лабиринта, откъдето общият брой ходове на Тезей не надвишава $4 \times \frac{2^{198}-2}{3} < 4^{100}$.

Забележка: Оценката може съществено да се подобри.

Оценяване. (7 точки) 1 т. за започване на анализ от ъглова стая; 3 т. за разсъждение, позволяващо оценката за една стая или група от стаи да се получи от оценките за няколко преди това разгледани стаи; 2 т. за подходящо групиране на стаите и прилагане на математическа индукция; 1 т. за пресмятане на окончателна оценка.