Съюз на математиците в България
Американска фондация за България
Фондация Георги Чиликов

Есенен математически турнир „Стефан Додунеков“

София – Плевен, 9 – 11 ноември 2019 г.

София, 2019 г.

Задача 8. 1. Да се намерят всички цели стойности на x, за които стойността на израза

$$M = |x^3 - 2x^2 - 10x + 8|$$

е просто число.

Решение. Разлагаме $M = |x-4||x^2+2x-2|$. M ще е просто число, ако единият множител е равен на 1, а другият е просто число.
1 сл. $|x-4| = 1 \Rightarrow x \in \{3, 5\}$. При $x = 3$ получаваме $M = 13$, което е просто. При $x = 5$ получаваме $M = 33$, което не е просто.
2 сл. $|x^2+2x-2| = 1 \Rightarrow x^2+2x-2 = \pm 1$. От първото уравнение намираме $x = 1$ или $x = -3$ и, съответно, $M = 3$ или $M = 7$, които са прости числа. Второто уравнение е еквивалентно на $(x+1)^2 = 2$, което няма решение в цели числа.
Окончателно, решенията са $x = 1$ и $x = \pm 3$.
Оценяване (6 точки): 2 т. – за разлагането на M; по 2 т. – за решаването на всеки от двата случая.

Задача 8. 2. Даден е триъгълник ABC. В полуравнината с контур правата BC, несъдържаща точка A, е взета точка P, така че $CP \perp BC$ и $CP = BC$, а в полуравнината с контур правата AC, несъдържаща точка B, е взета точка Q, така че $CQ \perp AC$ и $CQ = AC$. Точка F от отсечката AP е такава, че $\sphericalangle CFP = \sphericalangle BQP$.
а) Да се докаже, че CF разполовява страната AB.
б) Нека AP пресича BC в точка N. Ако $CN : BN = 1 : 2$, да се намери отношението $AF : FN$.

Решение. а) Нека $CF \cap PQ = E$ и $BQ \cap AP = O$. От $\triangle APC \cong \triangle QBC$ получаваме, че $\sphericalangle POQ = 90^\circ$, а от $\sphericalangle CFP = \sphericalangle BQP$ следва, че $\sphericalangle PEF = 180^\circ - \sphericalangle EFP - \sphericalangle EPF = 180^\circ - \sphericalangle PQO - \sphericalangle QPO = \sphericalangle POQ = 90^\circ$. Тогава $\sphericalangle FCB = 90^\circ - \sphericalangle PCE = \sphericalangle CPQ$.
Построяваме точка L, такава че $ALBC$ е успоредник. От $\triangle LBC \cong \triangle QCP$ следва, че $\sphericalangle LCB = \sphericalangle CPQ = \sphericalangle FCB$, т.е., че $F \in CL$. Но от свойството на диагоналите в успоредника следва, че $CL \cap AB = M$ - среда на AB.
б) Нека K е средата на BN. От FN средна отсечка в триъгълник MKC следва, че $MK = 2FN$. От MK средна отсечка в триъгълник ABN следва, че $AN = 2MK = 4FN$. Тогава $AF : FN = 3 : 1$.
Оценяване (6 точки): а) 1 т. – за $\sphericalangle POQ = 90^\circ$; 1 т. – за $\sphericalangle FCB = \sphericalangle CPQ$; 2 т. – за M среда на AB.
б) 2 т. – за $AF : FN = 3 : 1$.

Задача 8. 3. Да се намерят всички естествени числа p и n, такива че p е просто и

$$p^3 + 5n - 1 = n(p^2 + 2p + 6n).$$

Решение. Условието е равносилно с $p(p^2 - pn - 2n) = (2n-1)(3n-1)$, така че p дели $2n-1$

или $3n-1$. Ако $2n-1 \geq 2p$ или $3n-1 \geq 3p$, то лявата страна е отрицателна, а дясната – положителна. Остава да проверим случаите:
• $p = 2n-1$, което не води до естествени решения;
• $p = 3n-1$, което не води до естествени решения;
• $2p = 3n-1$, което води до

$$p^2 - pn - 2n = 4n - 2$$
$$9n^2 - 6n + 1 - 2n(3n-1) = 24n - 8$$
$$3n^2 - 28n + 9 = 0$$
$$(3n-1)(n-9) = 0,$$

чието естествено решение е само $n = 9$. Оттук $p = 13$ и условията са изпълнени.
Оценяване (7 точки): 2 т. – за доказателство, че p дели $2n-1$ или $3n-1$; по 1 т. – за пълно изследване на всеки от случаите $2n-1 \geq 2p$, $2n-1 = p$, $3n-1 \geq 2p$, $3n-1 = p$.

Задача 8. 4. На дъска е записано по един път всяко трицифрено число, имащо сбор на цифрите 12. При първия ход се изтриват всички числа, които съдържат една или повече от цифрите 0, 8 и 9. При всеки следващ ход се изтриват по три числа, такива че цифрите на една от позициите им съвпадат, а във всяка от останалите две позиции се различават с 1 или с 2. Ако накрая на дъската останало само едно число, то кое може да е то?

Решение. Нека на ход след първия се изтриват три числа, такива че на една от позициите им е цифрата a, на другата са $b-1$, b и $b+1$, а на третата са $c-1$, c и $c+1$. Тогава сборът на всички първи цифри намалява с кратно на 3. След първия ход има 4 числа с първа цифра 1 (147, 156, 165, 174), 5 с първа цифра 2, 6 – с 3, 7 – с 4, 6 – с 5, 5 – с 6 и 4 – със 7, така че сборът на всички първи цифри е

$$4.1 + 5.2 + 6.3 + 7.4 + 6.5 + 5.6 + 4.7 = 148.$$

Това дава остатък 1 при деление на 3, следователно първата цифра на търсеното число може да е само 1, 4 и 7. По същия начин доказваме, че и останалите му цифри са 1, 4 или 7. И така, тъй като сумата от цифрите е 12, последното число може да е само 147, 174, 417, 444, 471, 714 или 741.
За да получим 444, може да изтрием
(174, 264, 354), (273, 363, 453), (372, 462, 552), (471, 561, 651),
(417, 426, 435), (327, 336, 345), (237, 246, 255), (147, 156, 165),
(741, 642, 543), (732, 633, 534), (723, 624, 525), (714, 615, 516).
За да получим 174, в горния списък може да заменим първото изтриване с (264, 354, 444).
За да получим някое от останалите, прилагаме списъка за 174 с подходящо разместени позиции в зависимост от позициите на 1, 7 и 4 в желаното число.
Оценяване (7 точки): 1 т. – за доказателство, че сборът намалява с кратно на 3; 2 т. – за откриване на всички възможни последни числа; 1 т. – за конструкция, реализираща 444; по 0.5 т. – за конструкция, реализираща всеки от останалите шест примера.

Задача 9. 1. При кои стойности на параметъра m, уравнението

$$(x^2 - x - 6)(x^2 - 7x + 6) = m^2 - 15m$$

има два различни положителни и два различни отрицателни корена?

Решение. След разлагане уравнението добива вида

$$(x + 2)(x - 3)(x - 1)(x - 6) = m^2 - 15m \quad \Leftrightarrow \quad (x^2 - 4x - 12)(x^2 - 4x + 3) = m^2 - 15m.$$

След полагане $y := x^2 - 4x$, получаваме $y^2 - 9y - 36 - m^2 + 15m = y^2 - 9y - (m - 3)(m - 12)$. Корените на това уравнение (например чрез формулите на Виет) са: $y_1 = m - 3$ и $y_2 = 12 - m$. От условието за четири различни корена следва, че $m - 3 \neq 12 - m$ и значи $m \neq 15/2$. След връщане в полагането получаваме:

$$(1)\ x^2 - 4x - m + 3 = 0 \quad (2)\ x^2 - 4x - 12 + m = 0.$$

От формулите на Виет и условието за два положителни и два отрицателни корена следва, че $3 - m < 0$, съответно $m - 12 < 0$. Окончателно, отговорът на задачата е $m \in (3, 15/2) \cup (15/2, 12)$.
Оценяване (6 точки): 1 т. – за разлагането $(x^2 - 4x - 12)(x^2 - 4x + 3) = m^2 - 15m$; 1 т. – за полагането $y := x^2 - 4x$; 1 т. – за решаването на квадратното уравнение спрямо y; по 1 т. – за изследването на квадратните уравнения (1) и (2); 1 т. – за изключването на $m = 15/2$.

Задача 9. 2. Даден е триъгълник ABC, в който медианите AA_1 и BB_1 се пресичат в точка G. Ако вписаната в триъгълник ABC окръжност и вписаната в триъгълник AGB окръжност се допират до страната AB в една и съща точка, да се докаже, че триъгълник ABC е равнобедрен.

Решение. Да означим с D общата допирателна точка върху AB за двете окръжности. Изразяваме отсечката AD по два начина. От това, че D е точката на допиране на AB до вписаната в $\triangle AGB$ окръжност, имаме $AD = \frac{AB+AG-BG}{2}$, а от това, че D е точката на допиране на AB до вписаната в $\triangle ABC$ окръжност, имаме $AD = \frac{AB+AC-BC}{2}$. Приравнявайки двете изразявания, получаваме $AG - BG = AC - BC$, следователно $GA_1 - GB_1 = CB_1 - CA_1$ и, значи и периметрите на $\triangle B_1GC$ и $\triangle A_1GC$. Отделно, $S_{B_1GC} = \frac{1}{6} S_ABC = S_{A_1GC}$. Тогава, или $\triangle B_1GC \cong \triangle A_1GC$ или $\triangle B_1CG \cong \triangle A_1GC$ (равни лица и периметри + обща страна). Второто е невъзможно, защото от него $B_1G = CA_1$ и $A_1G = B_1C$ и за по-голямата от двете страни, да кажем $CA_1 \geq B_1C$ получаваме: $BB_1 = 3B_1G = 3CA_1 = CB + CA_1 \geq CB + CB_1$, противоречие с неравенството на триъгълника за $\triangle CBB_1$! Следователно, $\triangle B_1GC \cong A_1GC$ и $AC = 2B_1C = 2A_1C = BC$.
Оценяване (6 точки): 3 т. – за $P_{B_1GC} = P_{A_1GC}$; 2 т. – за $\triangle B_1GC \cong A_1GC$; 1 т. – за довършване.

Задача 9. 3. На дъска първоначално е записано числото r^n, където $r > 0$ е рационално число, а $n > 1$ е естествено число. Всяка минута Иван избира две (не непременно различни) числа a и b, записани на дъската, и дописва числата $\frac{a+b}{2}$ и $\frac{a}{b}$. Да се намерят всички стойности на n, за които съществува r, така че е възможно в даден момент върху дъската да се появи числото 17.

Решение. Отговор: $n = 2$. Първо, ще докажем следната лема:
Лема: Ако $x > y$, са естествени числа, такива че $(x, y) = 1$ и $x^n - y^n$ е точна степен на двойката за някое $n \geq 2$, то $n = 2$.
Доказателство: Тъй като x и y са взаимно прости, то и двете са нечетни. Ако n има нечетен делител k, то $n = km$ и

$$x^n - y^n = (x^m - y^m)\left(x^{m(k-1)} + x^{m(k-2)}y^m + \cdots + y^{m(k-1)}\right).$$

Вторият множител е сума на k нечетни събираеми, следователно е нечетно число, което е противоречие с условието. Остана $n = 2^k$. Но тогава при $k \geq 2$ имаме разлагането $x^{2^k} - y^{2^k} = \left(x^{2^{k-1}} - y^{2^{k-1}}\right)\left(x^{2^{k-1}} + y^{2^{k-1}}\right)$ и вторият множител дава остатък 2 по модул 4. Отново противоречие. Следователно, $n = 2$. Лемата е доказана.
Нека сега се върнем на оригиналната задача и представим r във вид на несъкратима дроб $r = \frac{x}{y}$, $(x, y) = 1$. Без ограничение на общността, нека $r > 1$ и значи $x > y$ (ако това не е така, то за два хода получаваме $1 = r^n/r^n$ и $r^{-n} = 1/r^n$). Да допуснем, че съществува $n > 2$, което да води до решение. Тогава, съгласно лемата, съществува нечетно просто p, $p|x^n - y^n$ и $(p, x) = (p, y) = 1$. Ще докажем, че във всеки момент $p|s - t$, където $\frac{s}{t}$ е произволно число от написаните на дъската. За целта е достатъчно да покажем, че операциите "средно аритметично" и "деление" запазват търсеното свойство. Наистина, нека $a = \frac{x_1}{y_1}$ и $b = \frac{x_2}{y_2}$, където $(x_1, y_1) = (x_2, y_2) = 1$, $p|x_1 - y_1$, $p|x_2 - y_2$ и p не дели нито едно от четирите числа. Тогава,

$$\frac{a+b}{2} = \frac{x_1y_2 - x_2y_1}{2y_1y_2} \Rightarrow x_1y_2 + x_2y_1 - 2y_1y_2 = y_2(x_1 - y_1) + y_1(x_2 - y_2) \equiv 0 \pmod{p},$$

$$\frac{a}{b} = \frac{x_1y_2}{x_2y_1} \Rightarrow x_1y_2 - x_2y_1 = (x_1y_2 - y_1y_2) - (x_2y_1 - y_1y_2) = y_2(x_1 - y_1) - y_1(x_2 - y_2) \equiv 0 \pmod{p}.$$

Освен това, знаменателите и на двете дроби ($2y_1y_2$ и x_2y_1) са взаимно прости с p, така че свойството се запазва и след привеждането на $\frac{a+b}{2}$ и $\frac{a}{b}$ в несъкратими дроби. Следователно, за да запишем на дъската числото 17, трябва $17 - 1 = 16 \equiv 0 \pmod{p}$, което е невъзможно. Така, $n \geq 3$ не води до решение. Остава да проверим $n = 2$. Един възможен вариант е $r = 3$ и

$$9 \to \frac{9}{9} = 1 \to \frac{9+1}{2} = 5 \to \frac{9+5}{2} = 7 \to \frac{5+1}{2} = 3 \to \frac{3}{\frac{1}{7}} = 21$$
$$21 \to \frac{21+1}{2} = 11 \to \frac{3}{\frac{1}{11}} = 33 \to \frac{33+1}{2} = 17.$$

Оценяване (7 точки): 2 т. – за доказване на лемата; 1 т. – за разглеждане на нечетен прост делител на $x^n - y^n$; 3 т. – за доказване на инвариантата $p|s-t$; 1 т. – за пример при $n = 2$.

Задача 9. 4. В равнината са дадени окръжност ω с център точката O с координати $(0,0)$ и радиус $R = 1$, и точката A с координати $(1,1)$. Да се намерят всички точки B, за които съществуват (не непременно две по две различни) точки $P_1, P_2, \ldots, P_{2018}$, такива че всяка от средите на 2019-те отсечки AP_1, P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4, ... , $P_{2017}P_{2018}$ и $P_{2018}B$ лежи върху ω.

Решение. Отговор: Кръгът с център точката $A'(-1,-1)$, симетрична на A спрямо O и радиус $R = 2 \cdot 2019 = 4038$.
Първо, нека за всяко четно k дефинираме точката Q_k – симетрична на P_k спрямо центъра на окръжността O. Тогава, в $\triangle P_{k-1}P_kQ_k$ средната отсечка спрямо страната $P_{k-1}Q_k$ се явява радиус в ω и, следователно $|P_{k-1}Q_k| = 2r = 2$. Аналогично, $|Q_kP_{k+1}| = 2r = 2$. Така, на всеки път $AP_1P_2 \ldots P_{2018}B$ с търсените в задачата свойства съпоставяме начупения път $A'P_1Q_2P_3 \ldots P_{2017}Q_{2018}B$, състоящ се от 2019 последователни отсечки с дължина 2, свързващ A' с точката B. Лесно се съобразязба, че и обратното е вярно, т.е., че на всеки начупен път $A'P_1Q_2P_3 \ldots P_{2017}Q_{2018}B$, състоящ се от 2019 последователни отсечки с дължина 2 можем да съпоставим път $AP_1P_2 \ldots P_{2018}B$ с търсените в задачата свойства.
Така, преформулирахме задачата до: да се намерят всички точки B, които могат да се свържат с A' посредством 2019-начупен път от последователни отсечки с дължина 2. Ще докажем по индукция, че търсеното множество от точки за n-начупен път, $n \geq 2$ е кръгът с център A' и радиус $2n$. При $n = 2$, ако $|A'B| > 4$, то от неравенството на триъгълника няма как да съществува 2-начупен път $A'P_1B$, $|A'P_1| = |P_1B| = 2$. Обратно, при $|A'B| \leq 4$ съществува (може и изроден) равнобедрен триъгълник $A'P_1B$ с основа $A'B$ и бедра с дължина 2. Очевидно, точката A' също е достижима. С това доказахме базата на индукцията.
Сега, нека твърдението е вярно за n и да разгледаме $(n+1)$-начупени пътища с начало A'. Отново, ако $|A'B| > 2(n+1)$, точката B няма как да бъде достижима, тъй като дължината на начупения път е не по-малка от разстоянието между краищата му. Ако $|A'B| \leq 2n$, то от индикционното предположение, съществува n-начупен път $A'P_1Q_2 \ldots B$. Взимаме един от двата равнострани триъгълника $A'CP_1$ с основа $A'P_1$ и създаваме $(n+1)$-начупеният път $A'CP_1Q_2 \ldots B$. Ако $2n < |A'B| \leq 2(n+1)$, избираме точката B_1 от отсечката $A'B$, така че $|A'B_1 = 2(n-1)$ и свързваме A' с B_1 посредством прав $(n-1)$-начупен път. Съгласно случая $n = 2$, от B_1 до B съществува 2-начупен път и, обединявайки двата пътя, построихме $(n+1)$-начупен път между A' и B. С това индукцията е завършена.
Окончателно, търсеното множество от точки B е кръг с център точката $A'(-1,-1)$, симетрична на A спрямо O и радиус $R = 2 \cdot 2019 = 4038$.
Оценяване (7 точки): 1 т. – за въвеждането на точките Q_k и A'; 3 т. – за доказването на взаимно еднозначно съответствие между търсените пътища $AP_1 \ldots P_{2018}B$ и 2019-начупените пътища $A'P_1Q_2 \ldots P_{2017}Q_{2018}B$; 3 т. – за довършване.

Задача 10. 1. Дадени са квадратните функции

$$f(x) = x^2 + ax + b \quad \text{и} \quad g(x) = x^2 + bx + a$$

с реални параметри a и b. Известно е, че уравнението $f(x)g(x) = 0$ има четири различни реални корена и тяхното произведение е 10. Ако графиките на функциите $f(x)$ и $g(x)$ се пресичат в единствена точка A и тя е на разстояние $\sqrt{65}$ от началото на координатната система, да се намерят a и b.
Решение. Нека x_1 и x_2 са корените на $f(x) = 0$, а x_3 и x_4 – на $g(x) = 0$. От формулите на Виет получаваме, че $x_1x_2 = b$ и $x_3x_4 = a$ и следователно $x_1x_2x_3x_4 = ab$. От друга страна x_1, x_2, x_3, x_4 са точно корените на $f(x)g(x) = 0$. Следователно $ab = 10$.
При $a = b$ графиките на f и g съвпадат, така че може да предполагаме, че $a \neq b$. Сега ако $A = (x_0, y_0)$, то $f(x_0) = g(x_0) = y_0$ и тъй като $a \neq b$, лесно намираме, че $x_0 = 1$, а $y_0 = a + b + 1$. Нека $B = (1, 0)$, а $O = (0, 0)$ е началото на координатната система. Тогава $\triangle OAB$ е правоъгълен с катети $OB = 1$ и $AB = |a + b + 1|$. Тогава по Теоремата на Питагор $|OA|^2 = 1+(a+b+1)^2$. От друга страна $|OA|^2 = 65$, откъдето получаваме, че $(a+b+1)^2 = 64$, тоест $a + b = 7$ или $a + b = -9$.
В случая $a+b = 7$ от $ab = 10$ намираме, че a и b са корените на уравнението $t^2 - 7t + 10 = 0$, тоест $\{a, b\} = \{2, 5\}$. Тъй като обаче $2^2 - 4.5 < 0$, то едно от двете уравнения $f(x) = 0$ или $g(x) = 0$ няма реални корени. Следователно $\{a, b\} = \{2, 5\}$ не е решение.
В случая $a+b = -9$ от $ab = 10$ намираме, че a и b са корените на уравнението $t^2+9t+10 = 0$, тоест $\{a, b\} = \{\frac{-9+\sqrt{41}}{2}, \frac{-9-\sqrt{41}}{2}\}$. Ясно е, че $a < 0$ и $b < 0$ и следователно в този случай $a^2 - 4b > 0$ и $b^2 - 4a > 0$, тоест $f(x) = 0$ и $g(x) = 0$ имат по два различни реални корена, а тъй като A е единствената обща точка за двете графики и тя има y-координата $|a+b+1| = 8$, то $f(x) = 0$ и $g(x) = 0$ нямат общи корени.
Окончателно: $(a, b) = (\frac{-9+\sqrt{41}}{2}, \frac{-9-\sqrt{41}}{2})$ и $(a, b) = (\frac{-9-\sqrt{41}}{2}, \frac{-9+\sqrt{41}}{2})$.
Оценяване (6 точки): 1 т. – за намиране на ab; 2 т. – за намиране на двете възможни стойности на $a + b$; по 1 т. – за намирането на корените на всяко от двете квадратни уравнения; 1 т. – за довършване.

Задача 10. 2. Точките P, Q и R съответно от страните BC, CA и AB на триъгълник ABC са такива, че правите AP, BQ и CR се пресичат в точка S. Ако

$$S_{ABS} = S_{QSPC} \text{ и } \frac{S_{ARC}}{S_{BRC}} = \frac{|CA|^4}{|BC|^4},$$

да се докаже, че четириъгълникът $ABPQ$ е вписан в окръжност.
Решение. Използваме стандартните означения: $a = |BC|$, $b = |AC|$ и h_a, h_b за съответните им височини. От $S_{ABS} = S_{QSPC}$ получаваме $S_{ABP} = S_{QBC}$, откъдето следва, че

$$BP.h_a = CQ.h_b \iff BP = \frac{h_b}{h_a}.CQ \iff BP = \frac{a}{b}.CQ.$$

Аналогично, от $S_{ABS} = S_{QSPC}$ получаваме $S_{ABQ} = S_{APC}$ и $AQ = \dfrac{b}{a}.CP$. Тъй като

$$\frac{BP.CQ.AR}{CP.QA.RB} = \frac{\frac{a}{b}.CQ.CQ}{CP.\frac{b}{a}.CP}.\frac{AR}{BR} = \frac{a^2CQ^2}{b^2CP^2}.\frac{b^4}{a^4} = \left(\frac{a.CQ}{b.CP}\right)^2$$

от теоремата на Чева за $\triangle ABC$ получаваме $\dfrac{CQ}{CP} = \dfrac{b}{a}$. Следователно $CP.a = CQ.b$, което означава, че четириъгълника $ABPQ$ е вписан в окръжност.

Оценяване (6 точки): 1 т. – за $BP = \dfrac{a}{b}.CQ$; 1 т. – за $AQ = \dfrac{b}{a}.CP$; 3 т. – за $\dfrac{BP.CQ.AR}{CP.QA.RB} = \left(\dfrac{a.CQ}{b.CP}\right)^2$; 1 т. – за $CP.a = CQ.b$ и извода, че $ABPQ$ е вписан в окръжност.

Задача 10. 3. Нека $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ е редицата:

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_{n+2} = 3x_{n+1} + x_n \text{ за } n \geq 0.$$

Да се намерят всички прости числа $p \in [2000; 2100]$, чийто десетичен запис завършва на 9 и $p|x_{p-1}$.

Решение. Характеристичното уравнение за $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ е $t^2 - 3t - 1 = 0$ с корени $t_1 = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$ и $t_2 = \frac{3-\sqrt{13}}{2}$. Тогава от условията $x_0 = 0$ и $x_1 = 1$ лесно намираме, че общият член на редицата $\{x_n\}$ е:

$$\begin{aligned} x_n = \frac{1}{\sqrt{13}}(t_1^n - t_2^n) &= \frac{1}{2^{n-1}\sqrt{13}} \sum_{k:2k+1\leq n} \binom{n}{2k+1} 3^{n-2k-1}\sqrt{13}^{2k+1} \\ &= \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k:2k+1\leq n} \binom{n}{2k+1} 3^{n-2k-1}13^k. \end{aligned}$$

Следователно ако $13|x_n$, то $13|n$.
Нека сега $n = p-1$ и $p > 3$. Тогава $x_n \equiv 0 \pmod p$ точно когато $2^{n-1}x_n \equiv 0 \pmod p$. Освен това лесно намираме, че $\binom{p-1}{2k+1} \equiv (-1)^{p-1-2k-1} \pmod p$. Оттук следва, че $x_{p-1} \equiv 0 \pmod p$ точно когато:

$$\sum_{k:2k+1\leq p-1} (-1)^{p-2k-2}13^k3^{p-2k-2} \equiv 0 \pmod p.$$

Оттук намираме, тъй като $p > 3$, че $13^{\frac{p-1}{2}} - 3^{p-1} \equiv 0 \pmod p$. Следователно $13^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod p$, тоест 13 е квадратичен остатък по модул p. От теоремата на Гаус знаем, че $(\frac{13}{p})(\frac{p}{13})(-1)^{\frac{(13-1)(p-1)}{2}} = 1$, тоест $(\frac{13}{p})(\frac{p}{13}) = 1$. Следователно 13 е квадратичен остатък по модул p точно когато p е квадратичен остатък по модул 13. Тъй като квадратичните остатъци по модул 13 са $1, 3, 4, -1, -3, -4$, то получаваме, че $p \equiv 1, 3, 4, -1, -3, -4 \pmod{13}$. В интервала $[2000; 2100]$ има десет числа, които завършват на 9. От таблица 1 се вижда, че от тях само 2019, 2029, 2079 и 2089 дават допустими остатъци по модул 13. Освен това

число	2009	2019	2029	2039	2049	2059	2069	2079	2089	2099
(mod 13)	-6	4	1	-2	-5	5	2	-1	-4	6

Таблица 1:

	7	11	17	19	23	29	31	37	41	43
2029	6	5	6	15	5	21	14	31	20	8
60	-3	-6	-9	-3	-9	-27	-2	-14	-22	-26
2089	3	-1	-3	12	-4	-6	12	17	-2	-18

Таблица 2:

очевидно 2019 и 2079 се делят на 3, тоест не са прости. Накрая лесно се проверява, че 2029 и 2089 са прости, вж. таблица 2, която показва какви остатъци дават двете числа при деление на простите числа по-малки от 46 ($46^2 = 2136$) и различни от $2, 3, 5$ и 13, които очевидно не делят 2029 и 2089. Окончателно $p = 2029$ и $p = 2089$.

Оценяване (7 точки): 1 т. – за намиране на явния вид на x_n; 2 т. – за $13^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$; 3 т. – за $p \equiv 1, 3, 4, -1, -3, -4 \pmod{13}$; 1 т. – за довършване.

Задача 10. 4. В едно училище, в школата за десети клас по математика участват 22-ама десетокласници. Някои от тях са *приятели* в новата социална платформа Графнет, а други – не.

Известно е, че ръководителят на школата не може да даде за домашно 10 различни задачи, по една на всеки ученик, така че всеки двама *приятели* в Графнет да получат различна задача.

Да се намери възможно най-големият брой групи от десетокласници, никои двама от които не са приятели в Графнет, за които това може да се случи.

Решение.

Първи начин: Да разгледаме граф $G = (V, E)$ с $n = 22$ върха – учениците в 10 клас, които посещават школата и ребра – приятелствата в платформата Графнет. Ще казваме, че едно множество от върхове $S \subseteq V$ е независимо, ако никои два върха в S не са съседни – това съответства на ситуацията, в която никои двама ученици от S не са приятели в Графнет.

Лема: Нека $G = (V, E)$ с n върха, за който при всяка оцветяване на върховете в k цвята има поне два едноцветни върха, свързани с ребро. Тогава броят на независимите множества в G е най-много $(k + 2)2^{n-k-1}$.

Да допуснем, че лемата е доказана. Тогава, за нашия граф, да допуснем, че учениците могат да бъдат "оцветени" в $k = 10$ цвята така, че никои двама приятели в Графнет да не получат един и същ цвят. Тогава ръководителят може да даде 10 задачи по една на всяка група от ученици, които имат един и същ цвят. Това е противоречие с условието на задачата. Това показва, че условията на лемата са изпълнени с $k = 10$, $n = 22$ и следователно броят на независимите множества е най-много $(10 + 2)2^{22-10-1} = 12.2^{11} = 24576$.

(Доказателство на лемата:) Ще докажем твърдението с индукция по n. При $n = 2$ е

необходимо $k = 1$, тоест имаме два върха $\{v_1, v_2\}$, които са свързани с ребро и лесно се вижда, че независимите множества са $\emptyset, \{v_1\}, \{v_2\}$, общо $3 = (1+2)2^{2-1-1}$.
За индуктивната стъпка, да разгледаме граф G с множество от върхове V, като $|V| = N$, за който всяко оцветяване на върховете в K цвята води до съществуването на два едноцветни върха, свързани с ребро. Нека A е максималното независимо множество от върхове на дадения граф и $|A| = s$. В графа с върхове $V \setminus A$ всяко оцветяване на върховете в $K-1$ върха води до съществуването на два едноцветни върха, свързани с ребро (в противен случай ще оцветим всички върхове на A в един цвят, а върховете на $V \setminus A$ в останалите $K-1$ цвята).
Според индукционното допускане броят на независимите множества в $V \setminus A$ е равен на $(K+1)2^{N-s-K}$. Тъй като всеки връх от $V \setminus A$ е свъран с поне един връх от A (поради максималността на A), то всяко независимо множество в $V \setminus A$, различно от празното, може да бъде разширено (включително с празното множество) по 2^{s-1} начина. Празното множество може да бъде разширено по 2^s начина. Следователно броят на независимите множества е най-много:

$$((K+1)2^{N-s-K} - 1)2^{s-1} + 2^s = (K+1)2^{N-K-1} - 2^{s-1} + 2^s = (K+1)2^{N-K-1} + 2^{s-1}.$$

Остава да забележим, че $s \leq N - K$, защото в противен случай можем да оцветим всеки от върховете на $V \setminus A$ (те са най-много $K-1$) в различен цвят, а всички върхове на A в един цвят. Следователно

$$(K+1)2^{N-K-1} + 2^{s-1} \leq (K+2)2^{N-K-1}.$$

С това лемата е доказана.
Следователно броят на множествата, които ни интересуват е най-много 12.2^{11}. От друга страна, ако номерираме учениците от $1, 2, \ldots, 22$ и i и j са приятели в Графнет точно когато $i \neq j$ и $i \leq 11$, и $j \leq 11$, то:

1. ръководителят на школата трябва да даде поне 11 задачи, защото иначе някои двама от $1, 2, \ldots, 11$ ще получат една и съща.
2. за всяко подмножество $S \subseteq \{12, \ldots, 22\}$, имаме, че $S, S \cup \{1\}, \ldots, S \cup \{11\}$ са множества от ученици, никои двама от които не са приятели в Графнет. Така всички множества с исканите свойства са (поне) $2^{11}.(1+11) = 12.2^{11}$.

Втори начин: Да разгледаме граф $G = (V, E)$ с $n = 22$ върха – учениците в 10 клас, и ребра – приятелствата в платформата Графнет.
Ще казваме, че множество от върхове е независимо, ако никои два върха не са свързани с ребро, което съответства точно на група от ученици, никой двама от които не са приятели в Графнет. Тогава от условието знаем, че ако $C_1 \cup C_2 \cdots \cup C_k = V$ и C_i са независими, то $k \geq 11 = \frac{n}{2}$.
Идеята е следната: ако всяко разбиване на независими множества е голямо, то между тях има ребра, които не допускат създаването на твърде много независими множества.

Горното е много грубо. За неговото изясняване ще се нуждаем от следното понятие. Разбиване $\mathcal{C} = \{C_i\}_{i=1}^k$ на V на независими множества ще наричаме *добро*, ако за всеки $i < j \leq k$ за всеки връх $u \in C_i$ има връх $v \in C_j$, който е съсед на u.

1. G допуска добро разбиване.

2. ако $\mathcal{C} = \{C_i\}_{i=1}^k$ е добро разбиване за G, то броят на независимите множества в G е не повече от:
$$(k+1)2^{n-k}.$$

За първата част, да разгледаме за всяко разбиване $\mathcal{C} = \{C_i\}_{i=1}^k$ величината:

$$g(\mathcal{C}) = \sum_{i=1}^k |C_i|^2.$$

Нека $\mathcal{C}$ е разбиване с максимална стойност на $g(\mathcal{C})$. Ясно е, че такова има, защото, $g(\mathcal{C}) \leq |V|^2 = n^2$ и приема само цели стойности. За такова разбиване $\mathcal{C} = \{C_i\}_{i=1}^k$ да подредим множествата в нарастващ ред по големина, тоест:

$$|C_1| \leq |C_2| \leq \cdots \leq |C_k|.$$

Да допуснем, че $\mathcal{C}$ не е добро. Тогава има $i < j$ и връх $u \in C_i$, който не е свързан с никой връх в C_j. Тогава $\mathcal{C}' = \{C_l'\}_{l=1}^k$ с:

$$C_l' = \begin{cases} C_l, \text{ ако } l \neq i, j \\ C_j \cup \{u\}, \text{ ако } l = j \\ C_i \setminus \{u\} \text{ ако } l = i \end{cases}$$

е разбиване като очевидно C_j' е независимо, откъдето $\mathcal{C}'$ е разбиване на независими множества. Освен това:

$$g(\mathcal{C}') - g(\mathcal{C}) = |C_j'|^2 + |C_i'|^2 - |C_j|^2 - |C_i|^2 = 2|C_j| - 2|C_i + 2 \geq 2.$$

Това е противоречие с избора на $\mathcal{C}$.
Сега за втората част. Нека $\mathcal{C} = \{C_i\}_{i=1}^k$ е добро разбиване. Тогава всяко независимо множество $S \subseteq V$ се определя еднозначно от сеченията:

$$S \cap C_i \text{ за } i \leq k.$$

Същественото е, че ако $S \cap C_i \neq \emptyset$, то $S \cap C_j$ може да заема най-много $2^{|C_j|-1}$ стойности за $j > i$, защото всеки елемент от $S \cap C_i$ "забранява" поне един елемент от $S \cap C_j$ за $j > i$. Оттук получаваме, че броят на независимите множества S е не повече от:

$$\sum_{i=1}^{k-1} (2^{|C_i|} - 1) \prod_{j=i+1}^{k} 2^{|C_j|-1} + 2^{|C_k|}.$$

Нека $c_i = |C_i|$. Тогава търсим най-голямата стойност на:

$$f(c_1, c_2, \dots, c_k) = \sum_{i=1}^{k-1} (2^{c_i} - 1) \prod_{j=i+1}^{k} 2^{c_j - 1} + 2^{c_k}$$

при ограничения $1 \leq c_1 \leq c_2 \leq \dots \leq c_k$ и $\sum_{i=1}^{k} c_i = n$. Да допуснем, че има $c_j > 1$ за някое $j < k$. Тогава, ако вземем най-малкото такова $j = j_0$ и дефинираме:

$$c_i' = \begin{cases} c_i \text{ ако } i \neq j_0, k \\ c_i - 1 \text{ ако } i = j_0 \\ c_i + 1 \text{ ако } i = k, \end{cases}$$

то лесно се проверява, че $(2^{c_i} - 1) \prod_{j=i+1}^{k} 2^{c_j - 1} = (2^{c_i'} - 1) \prod_{j=i+1}^{k} 2^{c_j' - 1}$ за $i < j_0$. Освен това:

$$(2^{c_i} - 1) \prod_{j=i+1}^{k} 2^{c_j - 1} < (2^{c_i'} - 1) \prod_{j=i+1}^{k} 2^{c_j' - 1}$$

при $k \geq i > j_0 + 1$. Накрая остана да забележим, че:

$$\begin{aligned} (2^{c_{j_0}} - 1) \prod_{j=j_0+1}^{k} 2^{c_j - 1} + (2^{c_{j_0+1}} - 1) \prod_{j=j_0+2}^{k} 2^{c_j - 1} &= 2^{c_{j_0}} \prod_{j=j_0+1}^{k} 2^{c_j - 1} + (2^{c_{j_0+1} - 1} - 1) \prod_{j=j_0+2}^{k} 2^{c_j - 1} \\ &= 2^{c_{j_0}'} \prod_{j=j_0+1}^{k} 2^{c_j' - 1} + (2^{c_{j_0+1} - 1} - 1) \prod_{j=j_0+2}^{k} 2^{c_j - 1} \\ &\leq 2^{c_{j_0}'} \prod_{j=j_0+1}^{k} 2^{c_j' - 1} + (2^{c_{j_0+1}' - 1} - 1) \prod_{j=j_0+2}^{k} 2^{c_j' - 1}, \end{aligned}$$

където използвахме, че $c_{j_0+1} = c_{j_0+1}' \geq c_{j_0} \geq 2$ и следователно $2^{c_{j_0+1}' - 1} - 1 \geq 1$. При $j_0 = k-1$ разсъждението е същото. Следователно, $f(c_1, \dots, c_k) \leq f(c_1', \dots, c_k')$. Това показва, че ако най-голямата стойност на $f(c_1, \dots, c_k)$ се достига при $c_1 = c_2 = \dots = c_{k-1} = 1$ и $c_k = n - (k-1)$. При тези стойности лесно се пресмята, че:

$$f(1, \dots, 1, n-k+1) = (k-1)2^{n-(k-1)-1} + 2^{n-(k-1)} = (k+1)2^{n-k}.$$

Сега при $k = 11$ и $n = 22$ получаваме, че $f(1, \dots, 1, 12) = 12.2^{11} = 24576$. От друга страна лесно се вижда, че ако $|C_1| = |C_2| \dots = |C_{10}| = 1$ и $|C_{11}| = 12$, което съответства на 10 ученика, които се познават по между си и един и същ от останалите 12, то оценката се достига.

Оценяване (7 точки): 1 т. – за въвеждане на добро разбиване; 2 т. – за доказателство, че добро разбиване има; 2 т. – за доказателство, че броят на независимите множества не надвишава $f(c_1, c_2, \ldots, c_k)$; 2 т. – за намиране на максималната стойност на f и довършване.

Задача 11. 1. Даден е $\triangle ABC$. Нека $\sphericalangle ACB = 45^\circ$, $AB = \sqrt{2}$ и $BM = m$, където M е средата на AC.
а) Ако $\alpha = \sphericalangle BAC$, да се изрази m като функция на $\operatorname{ctg}\alpha$.
б) Да се намерят всички стойности на m, за които $\sphericalangle BAC$ е еднозначно определен.

Решение. Нека $\sphericalangle BAC = \alpha$. Търсим онези стойности на m, за които $\alpha \in (0; 135^\circ)$ е еднозначно определен.
а) По синусова теорема намираме, че $|BC| = 2\sin\alpha$, а $|AC| = 2\sin(45^\circ + \alpha)$. Сега от формулата за дължина на медиана имаме, че:

$$m^2 = |BM|^2 = \frac{2|AB|^2 + 2|BC|^2 - |AC|^2}{4} = 1 + 2\sin^2\alpha - \sin^2(45^\circ + \alpha).$$

Ако положим $\operatorname{ctg}\alpha = t$, то $t \in (-1, +\infty)$ и от равенствата $\sin^2\alpha = \dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = \dfrac{1}{t^2+1}$ и $\sin^2(45^\circ + \alpha) = \dfrac{1+\sin 2\alpha}{2} = \dfrac{(t+1)^2}{2(t^2+1)}$ след кратки преобразувания достигаме до уравнението

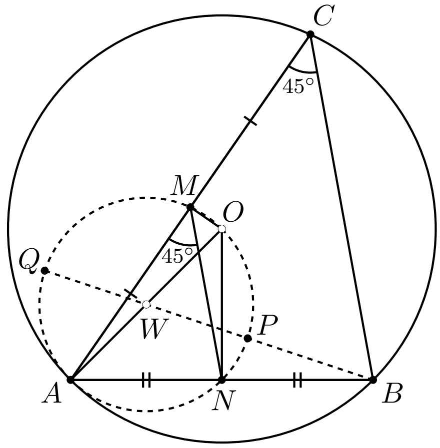
$$m = \sqrt{\frac{t^2 - 2t + 5}{2(t^2+1)}}.$$

б) Изразът от подточка а) е еквивалентен на

$$(1 - 2m^2)t^2 - 2t + 5 - 2m^2 = 0.$$

Нека $f(t) = (1-2m^2)t^2 - 2t + 5 - 2m^2$. Броят различни ъгли $\sphericalangle BAC$ отговаря на броя решения на уравнението в интервала $t \in (-1, +\infty)$. Така задачата се свежда до намиране стойностите на параметъра m, за които $f(t) = 0$ има единствен корен $t \in (-1, +\infty)$. Ако функцията е линейна, то $1 - 2m^2 = 0$, $m = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ и единственият корен е $t = 2 > -1$. Ако $D = 1 - (5 - 2m^2)((1 - 2m^2) = 0$, то $m^2 = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow m = \dfrac{\sqrt{5} \pm 1}{2}$, като и в двата случая двойният корен е в желания интервал. Ако пък $D > 0$, то е необходимо и достатъчно $f(-1).(1 - 2m^2) \leq 0$, т.е. $(8 - 2m^2)(1 - 2m^2) \leq 0 \Leftrightarrow m \in \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 2\right]$. Така окончателно получаваме, че $\sphericalangle BAC$ е еднозначно определен тогава и само тогава, когато $m \in \left[\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right] \cup \left\{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}, \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\right\}$.

Забележка. *Подточка б) може да бъде решена и синтетично, като се построи центъра O на описаната около $\triangle ABC$ окръжност и средата N на AB. Тогава M и N лежат на окръжността ω с диаметър AO. Нещо повече, от условието имаме, че $\sphericalangle AON = \sphericalangle ACB = 45^\circ$ и следователно $\triangle AON$ е равнобедрен правоъгълен, т.е. $AO = \sqrt{2}AN = 1$. В същото време, M лежи и на окръжността ω_b с център B и радиус m. Следователно е достатъчно да намерим стойностите на m, за които ω_b пресича дъгата $\overset{\frown}{AON}$ в единствена точка M.*



Нека W е центърът на ω и BW пресича ω в точките P и Q както е изобразено на чертежа. От една страна, $BP.BQ = BN.BA = 1$, а от друга, $BP.BQ = BP(BP+1)$ и следователно $BP = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$, $BQ = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$. Така окончателно получаваме, че $\sphericalangle BAC$ е еднозначно определен тогава и само тогава, когато $m \in \left[\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right] \cup \left\{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}, \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\right\}$.

Оценяване (6 точки): а) 2 т.; б) 1 т. – за свеждане на задачата до квадратно уравнение с единствен корен; 2 т. – за $m \in [\sqrt{2}/2, \sqrt{2}]$; 1 т. – за $m = (\sqrt{5}-1)/2$ и $m = (\sqrt{5}+1)/2$.

Задача 11. 2. Да се реши системата:

$$\left|\begin{array}{ccccc} \sqrt{x} & + & y & = & 3 \\ \sqrt{y} & + & z & = & 3-\sqrt{2} \\ \sqrt{z} & + & x & = & \sqrt{2} \end{array}\right. .$$

Решение. Не е трудно да се забележи, че

$$x = 1, \ \ y = 2, \ \ z = 3 - 2\sqrt{2}$$

е решение на системата.

От условието следва,че $x, y, z \in [0, +\infty)$. Да забележим, че в интервала $[0, +\infty)$ функциите $f(t) = \sqrt{t}$ и $g(t) = t$ са растящи. Да допуснем, че системата има две различни решения (x_0, y_0, z_0) и (x_1, y_1, z_1). Нека без ограничение на общността $x_0 < x_1$. От това, че $\sqrt{x}$ и y са едновременно растящи следва, че $y_0 > y_1$. Повтаряйки този аргумент, получаваме $z_0 < z_1$ и $x_0 > x_1$, противоречие. Следователно системата има единствено решение $x = 1$, $y = 2$, $z = 3 - 2\sqrt{2}$.

Оценяване (6 точки): 2 т. – за намиране на решение; 4 т. – за доказателство, че това е единственото решение.

Задача 11. 3. Нека $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ е редицата:

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_{n+2} = 3x_{n+1} + x_n \text{ за } n \geq 0.$$

Да се намерят всички прости числа $p \in [2000; 2100]$, чийто десетичен запис завършва на 9 и $p | x_{p-1}$.
Решение. Виж решението на задача 10.3.

Задача 11. 4. Нека p е просто число. Разглеждаме множествата

$$X = \{x = (x_1, x_2, x_3) \mid x_i \in \{0, 1, \dots, p-1\}, x \neq (0, 0, 0)$$

$$\text{и първата различна от 0 координата на } x \text{ е } 1\} \text{ и}$$

$$Y = \{y = (y_1, y_2, y_3) \mid y_i \in \{p, p+1, \dots, 2p-1\}, y \neq (p, p, p)$$

$$\text{и първата различна от } p \text{ координата на } y \text{ е } p+1\}.$$

Нека $G = (V, E)$ е граф с множество от върхове $V = X \cup Y$ и множество от ребра

$$E = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y, x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 \equiv 0 \pmod{p}\}.$$

Едно множество от върхове U ($U \subseteq V$) ще наричаме *представително* за V, ако всеки връх от V се съдържа в U или е съседен (свързан с ребро) с връх от U. Да се намери минималният брой върхове в едно представително множество за V.
Решение. Лесно пресмятаме, че $|X| = |Y| = p^2 + p + 1$, откъдето следва, че G е двуделен граф с $2(p^2 + p + 1)$ върха. Нещо повече, всеки връх от X е съседен на точно $p + 1$ върха от X и обратно. Освен това, кои да е два върха X (съответно от Y) имат точно един общ съседен връх (защо?).
Непосредствено се проверява, че множеството $U = A \cup B$, където

$$\begin{aligned} A &= \{(1, \alpha, 0) \mid \alpha = 0, 1, \dots, p-1\} \subset X, \\ B &= \{(1, 0, \beta) \mid \beta = p, p+1, \dots, 2p-1\} \subset Y \end{aligned}$$

е представително. Следователно търсеният минимален брой върхове не надхвърля $2p$.
Нека допуснем, че съществува представително множество U за V с брой елементи $|U| \leq 2p-1$, което изпълнява условието на задачата. Без ограничение на общността, нека $|A \cap U| \leq p-1$. Тогава съседните на елементите на U, лежащи в A са не повече от $(p+1)+(p-2)p = p^2 - p + 1$ (всеки връх има $p + 1$ съседни, а всеки връх от U след първия добавя не повече от p нови съседни). Сега

$$|B \cap U| \geq (p^2 + p + 1) - (p^2 - p + 1) = 2p,$$

откъдето

$$|U| = |A \cap U| + |B \cap U| \geq 2p,$$

което е противоречие и следователно търсеният минимален брой върхове е точно $2p$.
Оценяване (7 точки): 3т. – за представена конструкция с $2p$ върха; 3 т. – за доказателство за несъществуване на множество U с $U \leq 2p-1$; 7 т. за пълно доказателство.

Задача 12. 1. Нека $a_1, a_2, \ldots$ е такава редица от реални числа, че

$$a_{n+1} = \frac{1}{4} + \frac{\cos(\pi a_n)}{6}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Да се докаже, че редицата е сходяща и да се намери границата ѝ.
Решение. Имаме, че

$$(*)\ a_{n+1} - \frac{1}{3} = \frac{\cos(\pi a_n) - \cos(\pi/3)}{6} = \frac{1}{3}\sin\frac{\pi(a_n - 1/3)}{2}\sin\frac{\pi(a_n + 1/3)}{2}.$$

За $q = \pi/6 \in (0,1)$ следва, че $|a_{n+1} - 1/3| \leq q|a_n - 1/3|$, откъдето $|a_{n+1} - 1/3| \leq q^n|a_1 - 1/3|$ и значи $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1/3$.
Оценяване (6 точки): 3 т. за $(*)$ и 3 т. за довършване.

Задача 12. 2. Нека O е центърът на описаната окръжност около остроъгълен $\triangle ABC$, а M и N са средите на страните AB и BC. Правата CO разполовява отсечката MN. Да се намери най-малката възможна стойност на $\sphericalangle BAC$.
Решение. Ако $K = CO \cap MN$, то

$$\frac{MK}{\sin\sphericalangle MOK} = \frac{MO}{\sin\sphericalangle MKO}, \quad \frac{NK}{\sin\sphericalangle NOK} = \frac{NO}{\sin\sphericalangle NKO}$$

и значи

$$1 = \frac{MK}{NK} = \frac{MO}{NO}.\frac{\sin\sphericalangle MOK}{\sin\sphericalangle NOK} = \frac{\cos\gamma}{\cos\alpha}.\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha}$$
$$= \frac{\sin(\alpha-\beta+\gamma) + \sin(\alpha-\beta-\gamma)}{\sin 2\alpha} = \frac{\sin 2\beta - \sin 2\alpha}{\sin 2\alpha}.$$

Понеже $\alpha > \beta$ и $\gamma < 90^\circ$, то $\alpha > 45^\circ$. Ако $\alpha < 75^\circ$, следва, че $\sin 2\beta = 2\sin 2\alpha > 1$ – противоречие.
И така, $\alpha \geq 75^\circ$. При $\alpha = 75^\circ$ намираме, че $\beta = 45^\circ$ и $\gamma = 60^\circ$, като по обратния път следва, че триъгълник с тези ъгли изпълнява даденото условие.
Оценяване (6 точки): 3 т. за $\sin 2\beta = 2\sin\alpha$ и 3 т. за довършване.

Задача 12. 3. Дадено е естествено число $n \geq 2$. Да се намери най-малката възможна стойност на сума от вида

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(2 + a_{i-1})(a_i - a_{i-1}),$$

където $a_0 = 0$, $a_n = 1$ и $a_1, \dots, a_{n-1} \in [0, 1]$.
Решение. Нека S е дадената сума. Понеже

$$(1)\ 2a(a-b) = a^2 - b^2 + (a-b)^2,\ (2)\ 3ab(a-b) = a^3 - b^3 - (a-b)^3, \text{ то}$$

$$(3)\ S = 4/3 + \sum_{i=1}^{n} [(a_i - a_{i-1})^2 - (a_i - a_{i-1})^3/3].$$

Директно се проверява, че (4) функцията $f(x) = x^2 - x^3/3$ е изпъкнала при $x \le 1$ (това следва и от $f''(x) = 2 - 2x$). Тогава неравенството на Йенсен показва, че

$$(5)\ S \ge \frac{4}{3} + n\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{3n^3}\right) = \frac{(n+1)(4n-1)}{3n^2},$$

като равенство се достига при $a_i = i/n$, $0 \le i \le n$.
Оценяване (7 точки): по 2 т. за (1) и (2), и по 1 т. за (3), (4) и (5).

Задача 12. 4. Нека p е просто число. Разглеждаме множествата

$$X = \{x = (x_1, x_2, x_3) \mid x_i \in \{0, 1, \dots, p-1\}, x \ne (0, 0, 0)$$

и първата различна от 0 координата на x е 1$\}$ и

$$Y = \{y = (y_1, y_2, y_3) \mid y_i \in \{p, p+1, \dots, 2p-1\}, y \ne (p, p, p)$$

и първата различна от p координата на y е $p+1\}$.

Нека $G = (V, E)$ е граф с множество от върхове $V = X \cup Y$ и множество от ребра

$$E = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y, x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 \equiv 0 \pmod{p}\}.$$

Едно множество от върхове U ($U \subseteq V$) ще наричаме *представително* за V, ако всеки връх от V се съдържа в U или е съседен (свързан с ребро) с връх от U. Да се намери минималният брой върхове в едно представително множество за V.
Решение. Виж решението на задача 11.4.

Задачите са предложени от: 8.1, 8.2 – Таня Стоева; 8.3, 8.4 – Ивайло Кортезов; 9.1, 9.2 – Диана Данова; 9.3 – Александър Иванов и Станислав Харизанов; 9.4 – Кирил Бангачев и Станислав Харизанов; 10.1, 10.3, 10.4 – Стефан Герджиков; 10.2 – Емил Колев; 11.1 – Стоян Боев; 11.2, 11.4 – Иван Ланджев; 12.1, 12.2, 12.3 – Николай Николов;