Американска Фондация за България
Съюз на математиците в България

Есенен Математически Турнир

София, 7 – 9 ноември 2008 г.

estoyanov.net

София, 2008 г.

Кратки решения на задачите

Задача 8.1. Да се реши уравнението $|x-m|+|x+m| = x$ в зависимост от стойностите на параметъра m.

Решение. Нека x е едно решение на уравнението. Тогава от неравенството за модулите ще получим $x = |x-m|+|x+m| \geq |(x-m)+(x+m)| = 2|x|$, което е възможно само при $x = 0$. Но при $x = 0$ ще имаме $m = 0$. Окончателно уравнението има решение $x = 0$ при $m = 0$ и няма решение при $m \neq 0$.

Задача 8.2. Даден е $\triangle ABC$, за който $\sphericalangle A = 20°$, $\sphericalangle C = 40°$. Построени са ъглополовящата AL ($L \in BC$) и външната ъглополовяща CN ($N \in AB^{\rightarrow}$). Да се намери мярката на ъгъл CLN.

Решение. Нека AL и CN се пресичат в точка E. Нека точката $D \in AB^{\rightarrow}$ е такава, че $AD = AC$. Имаме $\triangle ACL \cong \triangle ADL$ и $\triangle ACE \cong \triangle ADE$ по I признак. Оттук $\triangle ECL \cong \triangle EDL$. Имаме $\sphericalangle ADL = \sphericalangle ACL = 40°$, $\sphericalangle EDL = \sphericalangle ECL = 70°$, откъдето $\sphericalangle NDE = \sphericalangle EDL = 70°$. Също така $\sphericalangle AED = \sphericalangle AEC = 60°$ и следователно $\sphericalangle DEN = 60°$. Сега $\triangle LED \cong \triangle NED$ по II признак и значи $LE = NE$ и $LD = ND$. Така DE е симетрала на отсечката LN. Сега $\sphericalangle LNE = 30°$ и значи $\sphericalangle NLC = 80°$.

Задача 8.3. Докажете, че съществува просто число p, сборът от цифрите на което е нечетно съставно число. Намерете най-малкото такова p.

Решение. Нека $p = \overline{a_0 a_1 \ldots a_n}$. Известно е, че $p \equiv a_0 + a_1 + \cdots + a_n \pmod 9$, а тъй като p и сборът от цифрите му са нечетни числа, то $p \equiv a_0 + a_1 + \cdots + a_n \pmod{18}$. Тъй като p е просто, то $a_0 + a_1 + \cdots + a_n \equiv 1, 5, 7, 11, 13$ или $17 \pmod{18}$. Най-малкото такова съставно число е 25. Ще потърсим трицифрено просто число със сбор от цифрите 25 (ако сборът е по-голям от 25, той е поне 35 и такива числа са поне четирицифрени). Единствените нечетни трицифрени числа със сбор от цифрите 25 са 799, 889, 979 и 997. Но $799 = 17.47$, $889 = 7.127$ и $979 = 11.89$, което показва, че тези числа не са прости. Числото 997 обаче е просто и това е търсеното най-малко просто число с желаното свойство.

Задача 8.4. Нека M е множество от 99 различни лъча с общо начало, които лежат в една равнина. Известно е, че два от тези лъчи образуват тъп ъгъл, във вътрешността на който няма лъчи от M. Какъв е възможно най-големият брой тъпи ъгли, чиито рамене са лъчи от M?

Решение. 99 лъча образуват $99.98/2 = 99.49$ ъгъла. Тези 99 от ъглите, вътре в които няма други лъчи, ще наричаме елементарни. Елементарните ъгли имат сбор 360°, така че сред тях има не повече от три тъпи. От условието следва, че има поне един тъп елементарен ъгъл.

Ако тъпите елементарни ъгли са три, те разделят лъчите на три множества, съдържащи съответно k, m, n лъча, $k+m+n=99$. Всички ъгли, съставени от лъчи от едно множество, са задължително остри.

Ако тъпите елементарни ъгли са два, те разделят лъчите на две множества; поне едното от тях се съдържа в остър ъгъл (нека в него има k лъча), а другото се съдържа в ъгъл, по-малък от $180°$. Разделяме второто по ъглополовящата на този ъгъл на две множества (съдържащи съответно m, n лъча), $k+m+n=99$. Всички ъгли, съставени от лъчи от едно от трите получени множества, са задължително остри.

Ако тъпият елементарен ъгъл е единствен, то всички лъчи се съдържат в ъгъл, по-малък от $270°$. Разделяме този ъгъл на три остри ъгъла. Нека в тях има съответно k, m, n лъча, $k+m+n=99$. Всички ъгли, съставени от лъчи от едно от трите получени множества, са задължително остри.

Във всеки от трите случаи общият брой остри ъгли е поне

$$\begin{aligned}\frac{k(k-1)}{2}+\frac{m(m-1)}{2}+\frac{n(n-1)}{2} &= \frac{k^2+m^2+n^2}{2}-\frac{k+m+n}{2}\\ &\geq \frac{(k+m+n)^2}{6}-\frac{99}{2}=\frac{99.33-99}{2}=99.16.\end{aligned}$$

Неравенството в горните разсъждения следва от неравенството между средно аритметично и средно квадратично, или от Коши - Буняковски - Шварц, или от класическото $k^2+m^2+n^2 \geq km+kn+mn$. Останалите не повече от $99.49-99.16=99.33=3267$ ъгли могат да са тъпи. Те могат да бъдат точно толкова: достатъчно е да има три елементарни тъпи ъгъла и $k=m=n=33$.

Задача 9.1. Да се реши системата $\left|\begin{array}{l} x^2y^2+|xy|=\dfrac{4}{9} \\ xy+1=x+y^2 \end{array}\right.$.

Решение. Тъй като $x^2y^2=|xy|^2$, от първото уравнение получаваме $(|xy|+\frac{1}{2})^2=\frac{25}{36}$, откъдето намираме $|xy|=\frac{5}{6}-\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$. Второто уравнение е еквивалентно на $(y-1)(x-y-1)=0$ и имаме две възможности.

Случай 1. Ако $y=1$, то $|x|=\frac{1}{3}$, откъдето $x=\pm\frac{1}{3}$.

Случай 2. Ако $y=x-1$, то $|x^2-x|=\frac{1}{3}$, т.е. $x^2-x=\pm\frac{1}{3}$. Знакът минус е невъзможен, защото тогава $(x-\frac{1}{2})^2=x^2-x+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}-\frac{1}{3}<0$. Следователно $x^2-x-\frac{1}{3}=0$, чиито решения са $x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{21}}{6}$. Съответно имаме $y=x-1=\frac{-3\pm\sqrt{21}}{6}$.

Окончателно, решенията са двойките

$$\left(\frac{1}{3},1\right),\left(-\frac{1}{3},1\right),\left(\frac{3+\sqrt{21}}{6},\frac{-3+\sqrt{21}}{6}\right),\left(\frac{3-\sqrt{21}}{6},\frac{-3-\sqrt{21}}{6}\right).$$

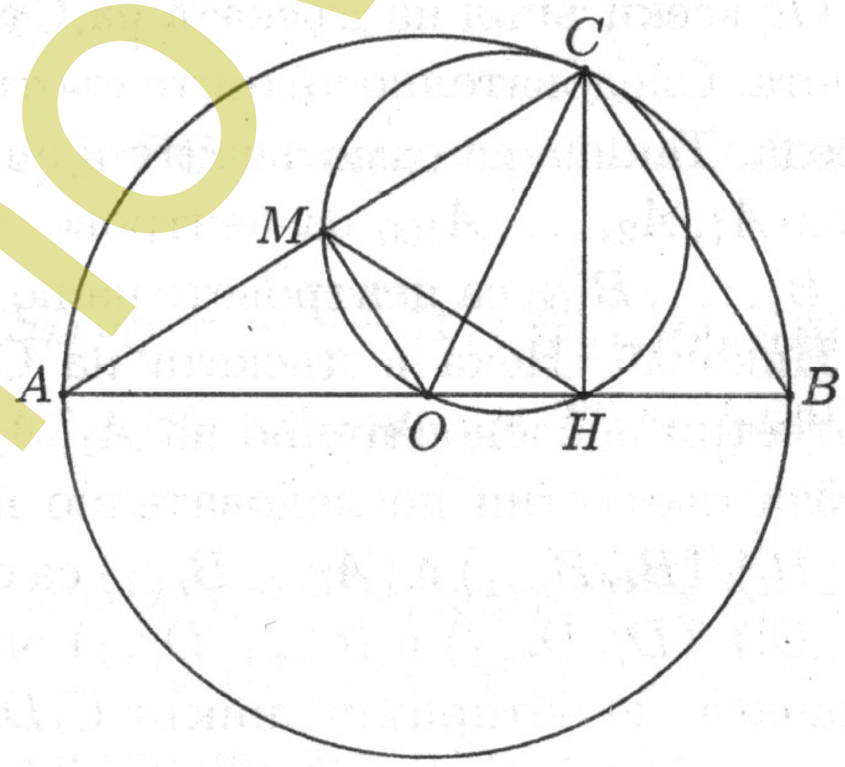
Задача 9.2. Даден е $\triangle ABC$, в който е спусната височината CH (H е вътрешна за AB) и с M е означена средата на страната AC. Да се докаже, че ако описаната около $\triangle ABC$ окръжност k и описаната около $\triangle MHC$ окръжност k_1 се допират, то радиусът на k_1 е два пъти по-малък от радиуса на k.

Решение. От условието за допиране на k и k_1 в точка C имаме

$$\sphericalangle CHM = \frac{1}{2}\widehat{MC} = \frac{1}{2}\widehat{AC} = \sphericalangle ABC.$$

От друга страна HM е медиана в правоъгълния $\triangle AHC$, откъдето следва, че $\angle ACH = \angle CHM = \angle ABC$. Тогава

$$\begin{aligned}\sphericalangle ACB &= \sphericalangle ACH + \sphericalangle BCH = \\ &= \sphericalangle ABC + \sphericalangle BCH = 90^\circ,\end{aligned}$$



т.е. $\triangle ABC$ е правоъгълен. Ако означим с O центъра на k, то O е средата на хипотенузата AB, и OM е средна отсечка в $\triangle ABC$. Следователно $OM \parallel BC$, откъдето $\sphericalangle OMC = 90^\circ = \sphericalangle OHC$, т.е. OC е диаметър в k_1 и радиус в k.

Задача 9.3. Нека n е естествено число. Да се докаже, че ако n^5+n^4+1 има точно 6 различни естествени делителя, то n^3-n+1 е точен квадрат на естествено число.

Решение. Едно естествено число има точно 6 естествени делителя тогава и само тогава, когато неговото канонично разлагане има вида p^5 или pq^2, където p и q са прости числа.

Имаме разлагането $n^5+n^4+1=(n^3-n+1)(n^2+n+1)$. Да отбележим, че n^2+n+1 не е точен квадрат на естествено число. Действително, ако допуснем противното и $n^2+n+1=t^2$ за някое естествено t, то $(2n+1)^2+3=(2t)^2$, което е невъзможно.

Да означим с d най-големият общ делител на n^3-n+1 и n^2+n+1. Тогава последователно имаме $d|n(n^2+n+1)-(n^3-n+1)=n^2+2n-1$, $d|n^2+2n-1-(n^2+n+1)=n-2$, $d|n^2+n+1-n(n-2)=3n+1$ и $d|3n+1-3(n-2)=7$. Следователно $d=1$ или $d=7$.

Случай 1. Ако $d = 1$, то $(n^3 - n + 1)(n^2 + n + 1) = pq^2$ и единствената възможност е $n^3 - n + 1 = q^2$ и $n^2 + n + 1 = p$, като първото от тези две равенства е твърдението на задачата. Една реализация се получава при $n = 3$.

Случай 2. Ако $d = 7$ и $(n^3 - n + 1)(n^2 + n + 1) = p^5$ или pq^2, то един от множителите отляво е равен на 7. Лесно се вижда, че това не дава решение.

Задача 9.4. Стоян и Николай имат две еднакви таблици 100×100. Всеки номерирал полетата на своята таблица с числата от 1 до 10000 по някакъв начин. Възможно ли е да се случи така, че всеки две числа a и b, които са в съседни полета в таблицата на Николай, да бъдат разположени в таблицата на Стоян така, че от едното може да се достигне до другото с един ход на шахматен кон?

Решение. Да допуснем, че отговорът е положителен, т.е. двете таблици могат да се номерират така, че всеки две числа a и b, които са в съседни полета в таблицата на Николай, да бъдат разположени в таблицата на Стоян така, че от едното може да се достигне до другото с един ход на шахматен кон.

От всеки ъгъл на дъската на Стоян с ход на кон може да се достигне точно до две полета. Следователно техните съответни в дъската на Николай имат не повече от два съседа. Такива са само ъглите и значи числата в ъглите на дъските си съответстват. Нека $A_1, A_2, \ldots, A_{100}$ са центровете на полетата от първия стълб (отгоре надолу), а $B_1, B_2, \ldots, B_{100}$ са центровете на полетата от втория стълб (отгоре надолу) на дъската на Николай. Нека в дъската на Стоян $C_1, C_2, \ldots, C_{100}$ са центровете на полетата, съответни последователно на $A_1, A_2, \ldots, A_{100}$ и $D_1, D_2, \ldots, D_{100}$ са центровете на полетата съответни последователно на $B_1, B_2, \ldots, B_{100}$. Тъй като двойките (A_i, A_{i+1}), (A_i, B_i), (B_i, B_{i+1}) и (A_{i+1}, B_{i+1}) са съседни в дъската на Николай, двойките (C_i, C_{i+1}), (C_i, D_i), (D_i, D_{i+1}) и (C_{i+1}, D_{i+1}) определят ходове на коня в дъската на Стоян. Това означава, че четириъгълникът $C_iD_iD_{i+1}C_{i+1}$ е с четири равни страни, т.е. е ромб.

Последното твърдение е вярно за всяко $i = 1, 2, \ldots, 99$. Тогава $C_1D_1D_{100}C_{100}$ е успоредник и, тъй като полетата с центрове C_1 и C_{100} са ъглови, един от върховете D_1 и D_{100} на този успоредник излиза извън дъската на Стоян, което е невъзможно.

Следователно отговорът на поставения в задачата въпрос е отрицателен.

Задача 10.1. За кои стойности на параметъра a уравнението

$$(2x - a)\sqrt{ax^2 - (a^2 + a + 2)x + 2(a + 1)} = 0$$

има три различни корена?

Решение. При $a = 0$ уравнението има два различни корена. Когато $a \neq 0$ от

$$ax^2 - (a^2 + a + 2)x + 2(a + 1) = (ax - 2)(x - a - 1).$$

следва, че корени на уравнението са $x = \dfrac{2}{a}, a + 1, \dfrac{a}{2}$. Тези корени са различни за

$a \neq -2, 1, 2$. Остава да проверим, ако $x = \frac{a}{2}$, за кои a подкоренната величина е положителна:

$$(a \cdot \frac{a}{2} - 2)(\frac{a}{2} - a - 1) = -\frac{1}{4}(a+2)^2(a-2) \geq 0,$$

откъдето $a \leq 2$. Окончателно $a \in (-\infty, -2) \cup (-2, 0) \cup (0, 1) \cup (1, 2)$.

Задача 10.2. Даден е $\triangle ABC$ и нека M е средата на страната BC, а P и Q са петите на перпендикулярите спуснати от M съответно към страните AB и AC на триъгълника. Да се намери $\angle BAC$, ако е известно, че $S_{MPQ} = \frac{1}{4}S_{ABC}$ и P и Q са вътрешни точки за страните на триъгълника.

Решение. От условието следва, че точките A, P, M и Q лежат на окръжност k с диаметър AM и тогава $\sphericalangle BAM = \sphericalangle PQM$ и $\sphericalangle CAM = \sphericalangle QPM$. Ако означим с N средата на AB, то MN е средна отсечка в $\triangle ABC$, $MN \parallel AC$ и значи $\sphericalangle AMN = \sphericalangle CAM$. Следователно $\triangle MPQ \sim \triangle NMA$. От друга страна, от условието следва, че

$$S_{MPQ} = \frac{1}{4}S_{ABC} = S_{NMA}.$$

Тогава $\triangle MPQ \cong \triangle NMA$. Следователно $AM = PQ$, PQ е диаметър в k и $\angle BAC = 90°$.

Забележка: От формулата на Ойлер имаме: $S_{MPQ} = \frac{S_{ABC}}{4}\left|1 - \frac{d^2}{R^2}\right|$, където d е разстоянието от M до центъра на описаната около $\triangle ABC$ окръжност. Така условието ни води до $d = 0$, т.е. $\angle BAC = 90°$.

Задача 10.3. Да се намерят всички естествени числа x, y и z, за които $7^x + 13^y = 2^z$.

Решение. От даденото уравнение имаме $2^z \equiv (-1)^y \pmod 7$. Тъй като $2^3 \equiv 1 \pmod 7$, сравнението $2^z \equiv -1 \pmod 7$ не е изпълнено за никое z, а сравнението $2^z \equiv 1 \pmod 7$ е изпълнено точно когато z се дели на 3. Така $z = 3l, l \in \mathbb{N}$, и y е четно число. Отново от даденото уравнение имаме $7^x \equiv 2^z = 2^{3l} \pmod{13}$ и оттук $7^{4x} \equiv 2^{12l} \equiv 1 \pmod{13}$, понеже по теоремата на Ферма $2^{12} \equiv 1 \pmod{13}$. Следователно $4x$ се дели на показателя на 7 по модул 13. Пресмятаме, че този показател е равен на 12 и получаваме, че 12 дели $4x$, т.е. $x = 3k$, $k \in \mathbb{N}$.

Да запишем даденото уравнение във вида

$$13^y = 2^{3l} - 7^{3k} = (2^l - 7^k)(2^{2l} + 2^l \cdot 7^k + 7^{2k}). \tag{1}$$

Не е възможно и двата множителя в дясната страна на (1) да се делят на 13, защото от $2^l \equiv 7^k \pmod{13}$ и $2^{2l} + 2^l \cdot 7^k + 7^{2k} \equiv 0 \pmod{13}$ следва $0 \equiv 7^{2k} + 7^k \cdot 7^k + 7^{2k} = 3 \cdot 7^{2k} \pmod{13}$, което е невъзможно. Следователно равенството (1) може да е изпълнено единствено при

$$2^l - 7^k = 1, \quad 2^{2l} + 2^l \cdot 7^k + 7^{2k} = 13^y. \tag{2}$$

Да разгледаме първото равенство в (2). Очевидно $l \geq 3$. Ако $l \geq 4$, получаваме $7^k \equiv -1 \pmod{16}$, което не е възможно за никое k, понеже $7^2 \equiv 1 \pmod{16}$. Следователно $l = 3$ и тогава $k = 1$, т.е. $z = 9$ и $x = 3$. Сега от второто равенство в (2) получаваме $13^y = 2^6 + 2^3 \cdot 7 + 7^2 = 169$ и $y = 2$.

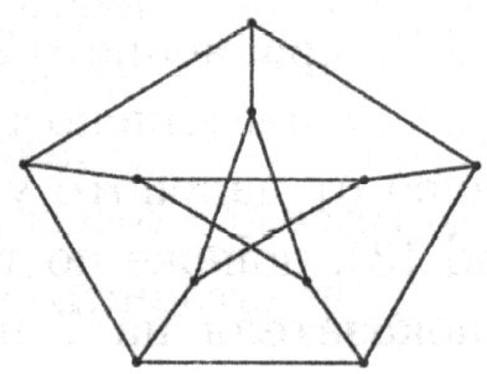
Окончателно търсените числа са $x = 3$, $y = 2$ и $z = 9$.

Задача 10.4. В автобус пътуват n пътници, $3 \leq n \leq 25$, някои от които са познати. Всеки пътник е познат с точно k други пътника, никои двама познати пътника нямат общ познат и всеки двама непознати имат точно един общ познат. Да се намери n.

Решение. Да разгледаме граф с n върха, всеки от които има k съседни, в който няма триъгълници и в който всеки два несъседни върха имат точно един общ съсед. Задачата се състои в определяне на броя на върховете на графа, ако е известно, че този брой е заключен между 3 и 25.

Нека x е произволен връх и да означим съседите му с $y_1, \ldots, y_k$. Всеки от върховете y_i, $i = 1, \ldots, k$, има $k-1$ съседа, различни от x. Да ги означим с $z_j^{(i)}$, $j = 1, \ldots, k-1$. Очевидно върховете $z_j^{(i)}$ са различни. Ако допуснем, че $z_{j_1}^{(i_1)} = z_{j_2}^{(i_2)} = w$ за някакви индекси i_1, i_2, j_1, j_2, то y_{i_1} и y_{i_2}, които са несъседни, ще имат два общи съседа (x и w) в противоречие с условието на задачата.

Да допуснем, че в графа съществува връх u, различен от върховете x, y_i, $z_j^{(i)}$, $i = 1, \ldots, k$, $j = 1, \ldots, k-1$. Тогава съгласно условието x и u имат общ съсед, който трябва да е измежду върховете y_i. Но върховете y_i нямат съсед извън върховете x и $z_j^{(i)}$, $i = 1, \ldots, k$, $j = 1, \ldots, k-1$. Следователно никой от върховете y_i не може да е съседен на u. С това доказахме, че графът няма други върхове освен върховете x, y_i, $z_j^{(i)}$, $i = 1, \ldots, k$, $j = 1, \ldots, k-1$, откъдето получаваме, че $n = 1 + k + k(k-1) = k^2 + 1$. Следователно $n = 5, 10$ или 17. В случаите $n = 5$ и $n = 10$ лесно построяваме граф с исканите свойства. При $n = 5$ търсеният граф представлява изпъкнал петоъгълник, а при $n = 10$ е т.н. граф на Петерсен (фиг. 1). Ще докажем, че такъв граф не съществува за $n = 17$. Да допуснем, че съществува такъв граф и нека означим върховете му с x, $y_1, \ldots, y_4$ с $z_j^{(i)}$, $i = 1, \ldots, 4$, $j = 1, \ldots, 3$.



фиг. 1

Както по-горе ще считаме, че x е съседен на $y_1, \ldots, y_4$ и че всеки от върховете y_i е съседен освен на x и на трите върха $z_j^{(i)}$, $j = 1, 2, 3$. От условието на задачата следва, че ако $z_j^{(i_0)}$ е съседен на върховете $z_a^{(i_1)}$, $z_b^{(i_2)}$, $z_c^{(i_3)}$, то $\{i_0, i_1, i_2, i_3\} = \{1, 2, 3, 4\}$. За всеки връх $z_j(i)$ дефинираме четворка $v_{i+3(j-1)} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$, в която $a_i = j$, а $a_k = l$ ако $k \neq i$ и $z_j^{(i)}$ е съседен на $z_l^{(k)}$. Без ограничение на общността можем до

считаме, че

$$\begin{aligned} v_1 &= (1,1,1,1), & v_2 &= (2,2,2,2) \\ v_3 &= (3,3,3,3), & v_4 &= (1,1,2,3) \\ v_5 &= (2,2,*,*), & v_6 &= (3,3,*,*) \\ v_7 &= (1,*,1,*), & v_8 &= (2,*,2,*) \\ v_9 &= (3,*,3,*), & v_{10} &= (1,*,*,1) \\ v_{11} &= (2,*,*,2), & v_{12} &= (3,*,*,3) \end{aligned}$$

Остава да проверим, че при всевъзможните попълвания на символите $*$ получаваме противоречие с условието на задачата.

Окончателно възможните стойности за n са $n = 5$ и $n = 10$.

Задача 11.1. Дадена е аритметична прогресия $a_1, a_2, \ldots$. Известно е, че съществуват естествени числа p, q и t, за които $a_p + tp = a_q + tq$. Ако $a_t = t$ и сборът на първите t члена на прогесията е равен на 18, да се намери a_{2008}.

Решение. От условието следва, че $a_1 + (p-1)d + tp = a_1 + (q-1)d + tq$, откъдето намираме $(p+1)(d+t) = 0$. Тъй като $p+q > 0$, то $d = -t$. Сега $t = a_t = a_1 + (t-1)(-t)$, т.е. $a_1 = t^2$. От $\sum_{i=1}^{t} a_i = 18$, следва $\frac{t^2+t}{2}.t = 18$, т.е. $t^2(t+1) = 36$. Тъй като t е естествено число, то $t = 3$, откъдето $a_{2008} = 9 + 2007.(-3) = -6012$.

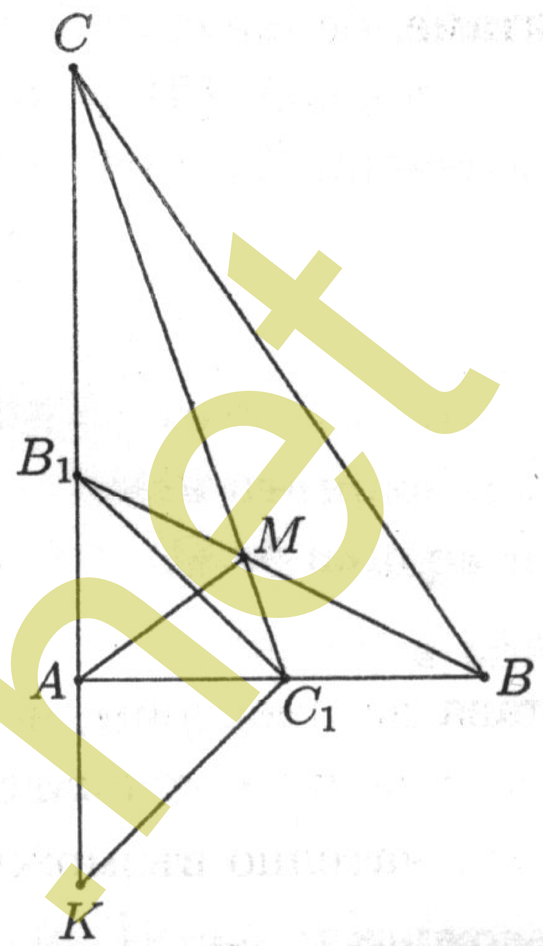
Задача 11.2. Върху страните AB и AC на правоъгълен $\triangle ABC$, $\sphericalangle A = 90°$ са избрани съответно точки C_1 и B_1. Ако $M = CC_1 \cup BB_1$ и $AC_1 = AB_1 = AM$ да се докаже, че

$$S_{AB_1MC_1} + S_{AB_1C_1} = S_{BMC}.$$

Решение. Понеже A е център на описаната около $\triangle B_1C_1M$ окръжност, то $\sphericalangle C_1B_1M = \frac{1}{2} \sphericalangle C_1AM$. От друга страна

$$\sphericalangle ACC_1 = 90° - \sphericalangle AC_1M = 90° - (90° - \frac{1}{2} \sphericalangle C_1AM) = \frac{1}{2} \sphericalangle C_1AM.$$

Следователно $\sphericalangle C_1B_1M = \sphericalangle C_1CB_1$ и аналогично $\sphericalangle B_1C_1M = \sphericalangle B_1BC_1$. Оттук следва, че $\triangle CB_1C_1 \sim \triangle B_1C_1B$, откъдето намираме



$$CC_1.C_1B_1 = CB_1.B_1B. \tag{1}$$

Нека $K \in CA$ и $AK = AC_1$, като A е между C и K. Тъй като $S_{AB_1C_1} = S_{AKC_1}$, то условието става $S_{KC_1MB_1} = S_{BMC}$. Последното равенство е еквивалентно на $S_{CKC_1} = S_{CBB_1}$. Тъй като KC_1MB_1 е вписан, то $\sphericalangle KC_1C = \sphericalangle CB_1B$ и следователно трябва да докажем, че $CC_1.C_1K = CB_1.B_1B$. Това равенство следва от $C_1K = C_1B_1$ и от (1).

Задача 11.3. В изпъкнал 2008-ъгълник част от диагоналите са оцветени в червено, а останалите в синьо така, че от всеки връх излиза точно един червен диагонал и никои три червени диагонала не минават през една точка. Известно е, че всеки син диагонал се пресича от червен диагонал във вътрешна точка. Да се намери минималния брой пресечни точки на червени диагонали.

Решение. Първо ще докажем, че движейки се по червени диагонали от всеки връх може да се стигне до всеки друг. Да допуснем, че това не е така. Без ограничение можем да считаме, че от A_1 може да се стигне да A_{k+1} и не може да се стигне до $A_2, \ldots, A_k$ за някое $k \geq 2$. Ако $k = 2$, то червения диагонал от A_2 ще пресича пътя от A_1 до A_3 и следователно от A_1 може да се стигне до A_2, противоречие. Ако $k > 2$, то A_1A_k е син диагонал и той трябва да се пресича от червен диагонал A_iA_j за $2 \leq i \leq k-1$ и $k+1 \leq j \leq 2008$. Такъв диагонал обаче винаги пресича пътя от A_1 до A_k, което означава, че от A_1 може да се стигне до A_i, противоречие.

Червените диагонали са точно 1004. От доказаното следва, че всеки червен диагонал пресича поне един червен диагонал. Да изберем два пресичащи се червени диагонала. От останалите червени диагонали поне един пресича дадените два защото в противен случай условието, че от всеки връх може да се стигне до всеки друг не е изпълнено. Продължавайки по този начин на всяка стъпка избираме червен диагонал, който пресича някой от вече избраните червени диагонали. Тъй като имаме 1002 червени диагонала, всеки новоизбран диагонал добавя поне една пресечна точка и никои три червени диагонала не минават през една точка, то имаме поне 1003 пресечни точки.

Лесно се вижда, че ако червените диагонали са A_1A_{1005}, A_2A_{2008}, $A_3A_{2007}, \ldots$, $A_{1004}A_{1006}$ имаме точно 1003 пресечни точки и условието на задачата е изпълнено.

estoyanov.net

Задача 11.4. а) Да се докаже, че $[x]$ е нечетно число тогава и само тогава, когато $\left[2\left\{\frac{x}{2}\right\}\right] = 1$. (С $[x]$ означаваме най-голямото цяло число ненадминаващо x и $\{x\} = x - [x]$.)

б) Дадено е естествено число n. Да се намери броят на свободните от квадрати числа a, за които числото $\left[\frac{n}{\sqrt{a}}\right]$ е нечетно. (Едно число се нарича свободно от квадрати, ако не се дели на квадрат на просто число.)

Решение. а) Нека $[x]$ е нечетно число. Тогава $x = 2t + 1 + \alpha$, където t е естествено число и $0 \le \alpha < 1$. Тогава $\frac{1}{2} \le \frac{\alpha+1}{2} < 1$, откъдето получаваме

$$2\left\{\frac{x}{2}\right\} = 2\left\{t + \frac{\alpha+1}{2}\right\} = 2\left\{\frac{\alpha+1}{2}\right\} = 2.\frac{\alpha+1}{2} = \alpha + 1.$$

Понеже $1 \le \alpha + 1 < 2$, то $\left[2\left\{\frac{x}{2}\right\}\right] = 1$. Аналогично получаваме, че ако $[x]$ е четно число, то $\left[2\left\{\frac{x}{2}\right\}\right] = 0$.

б) Нека A е множеството от свободните от квадрати естествени числа и m е произволно реално число. Ще докажем, че $\sum_{a\in A}\left[\frac{m}{\sqrt{a}}\right] = [m^2]$. Всяко естествено число може да се представи по единствен начин като p^2a, където a е свободно от квадрати. Да разгледаме всички числа, които не надминават m^2 и които се представят по този начин за някакво фиксирано a. Ако техният брой е k, то k е най-голямото число, за което $k^2a \le m^2$, т.е. $k = \left[\frac{m}{\sqrt{a}}\right]$. Тогава в сумата $\sum_{a\in A}\left[\frac{m}{\sqrt{a}}\right]$ са преброени всички естествени числа, не надминаващи m^2, т.е. тя е точно равна на $[m^2]$.

От а) следва, че търсим $\sum_{a\in A}\left[2\left\{\frac{n}{2\sqrt{a}}\right\}\right]$. От друга страна

$$\left[\frac{n}{\sqrt{a}}\right] = \left[2\frac{n}{2\sqrt{a}}\right] = \left[2\left[\frac{n}{2\sqrt{a}}\right] + 2\left\{\frac{n}{2\sqrt{a}}\right\}\right] = 2\left[\frac{n}{2\sqrt{a}}\right] + \left[2\left\{\frac{n}{2\sqrt{a}}\right\}\right]$$

откъдето $\left[2\left\{\frac{n}{2\sqrt{a}}\right\}\right] = \left[\frac{n}{\sqrt{a}}\right] - 2\left[\frac{n}{2\sqrt{a}}\right]$

Като използваме доказаното по-горе, намираме

$$\sum_{a\in A}\left[2\left\{\frac{n}{2\sqrt{a}}\right\}\right]=\sum_{a\in A}\left[\frac{n}{\sqrt{a}}\right]-2\sum_{a\in A}\left[\frac{n}{2\sqrt{a}}\right]=n^2-2\left[\frac{n^2}{4}\right].$$

Лесно се проверява, че при n четно $n^2-2\left[\frac{n^2}{4}\right]=\frac{n^2}{2}$, а при n нечетно $n^2-2\left[\frac{n^2}{4}\right]=\frac{n^2+1}{2}$.

Задача 12.1. Да се намерят стойностите на реалния параметър a, за които решенията на системата неравенства

$$\left|\begin{array}{l}\log_{\frac{1}{3}}(3^x-6a)+\dfrac{2}{\log_a 3}<x-3\\ \log_{\frac{1}{3}}(3^x-18)>x-5\end{array}\right.$$

образуват интервал с дължина $\frac{1}{3}$.

Решение. Първото неравенство има смисъл при $a>0$, $a\neq 1$ и $3^x>6a$. То се записва във вида

$$\log_{\frac{1}{3}}(3^x-6a)-\log_{\frac{1}{3}}a^2<x-3\Leftrightarrow\log_{\frac{1}{3}}\frac{3^x-6a}{a^2}<x-3$$

$$\Leftrightarrow\frac{3^x-6a}{a^2}>3^{3-x}\Leftrightarrow 3^{2x}-6a3^x-27a^2>0.$$

Полагаме $y=3^x>0$. Тогава $y^2-6ay-27a^2>0$ и следователно $y>9a$, т.е. $x>\log_3 9a$.

Второто неравенство е еквивалентно на

$$0<3^x-18<3^{5-x}\Leftrightarrow 0<3^x(3^x-18)<3^5\Leftrightarrow 18<3^x<27\Leftrightarrow x\in(\log_3 18,3).$$

Понеже $3-\log_3 18>\frac{1}{3}$ (проверете), то условието е еквивалентно на $3-\log_3 9a=\frac{1}{3}$, т.е. $a=\sqrt[3]{9}$.

Задача 12.2. Нека ABC е триъгълник, за който средата на страната AB, центърът на вписаната окръжност и допирната точка на външновписаната окръжност към страната BC с продължението на страната AC лежат на една права. Да се намерят страните AB и BC, ако $AC=3$ и $\angle ABC=60°$.

Решение. Нека M е средата на AB, I е центърът на вписаната окръжност и N е допирната точка на външновписаната окръжност към страната BC с продължението на страната AC. Точките M, I и N лежат на една права точно когато е в сила

$S_{MAN} = S_{MAI} + S_{NAI}$. Тъй като $AN = p$, следва, че $cp\sin A = cr + 2pr$. Заместваме $\sin A = \dfrac{2S}{bc}$, $r = \dfrac{S}{p}$ и след съкращаване получаваме

$$\frac{a+b+c}{2b} = \frac{c}{a+b+c} + 1 \Leftrightarrow b^2 + 2bc = a^2 + c^2 + 2ac.$$

Тъй като $\angle ABC = 60^\circ$ от косинусовата теорема имаме $b^2 = a^2 + c^2 - ac$. Като заместим по-горе, намираме, че $2b = 3a$. Тъй като $b = 3$, то $a = 2$ и тогава $c^2 - 2c - 5 = 0$, т.е. $c = 1 + \sqrt{6}$.

Задача 12.3. Да се намерят всички непрекъснати функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такива, че

$$((f(x)f(y) - 1)f(x+y) = 2f(x)f(y) - f(x) - f(y)$$

за произволни $x, y \in \mathbb{R}$.

Решение. Първо да предположим, че $f(x_0) = 1$ за някое x_0. При $x = y = x_0/2$ от даденото равенство, което ще означаваме със $(\star)$, следва, че $(f(x_0/2) - 1)^2 = 0$, т.е. $f(x_0/2) = 1$. Следователно $f(x_0/2^n) =$ за всяко $n \in N$. Тъй като f е непрекъсната функция (в точката 0), заключаваме, че $f(0) = 1$. Сега полагането $y = 0$ в $(\star)$ води до $(f(x) - 1)^2 = 0$, т.е. $f(x) = 1$. Очевидно функцията $f \equiv 1$ изпълнява $(\star)$.

Нека сега $f(x) \neq 1$ за всяко x. Ако $g(x) = \dfrac{f(x)}{f(x) - 1}$, то $(\star)$ приема вида $g(x+y) = g(x) + g(y)$. Тъй като g е непрекъсната, то (както е добре известно) $g(x) = ax$ за някое $a \in R$. Понеже $g(x) \neq 1$ за всяко x, то $a = 0$, т.е. $f \equiv 0$. Тази функция също удовлетворява $(\star)$.

Задача 12.4. Вени написала краен брой различни реални числа (възможно едно число), повдигнала ги на квадрат, след това от всяко извадила 1 и получила началните числа в някакъв ред. Кои са числата?

Решение. Нека множеството от написаните числа е $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Тогава $A = \{a_1^2 - 1, a_2^2 - 1, \ldots, a_n^2 - 1\}$. Да забележим, че $a \geq -1$ за всяко $a \in A$.

Нека $A \ni a > 0$. Тогава $a = b^2 - 1$ за някое $b \in A$, откъдето $b = \pm\sqrt{1+a}$. Понеже $b > -1$, то $b = \sqrt{1+a}$. Следователно, ако $c_1 = a$ и $c_{i+1} = \sqrt{c_i + 1}$, $i \in \mathbb{N}$, то $c_i \in A$. Да означим с $x_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ корените на уравнението $x^2 - x - 1 = 0$. Лесно се проверява, че ако $c_1 < x_1$ или $c_1 > x_1$, то съответно $c_i \uparrow x_1$ или $c_i \downarrow x_1$. Понеже A е крайно множество, следва, че $a = c_1 = x_1$.

Нека $a \in (x_2, 0)$. Тогава $A \ni a^2 - 1 > -1$ и $a^2 - 1 - x_2 < x_2^2 - 1 - x_2 = 0$. Този случай се свежда до следващия.

Сега да отбележим, че ако $a \in A$, то $(a^2 - 1)^2 - 1 = a^4 - 2a^2 \in A$. Нека $A \ni a \in (-1, x_2)$, и $c_{i+1} = c_i^4 - 2c_i^2$, $i \in \mathbb{N}$. Понеже $A \ni c_i \geq -1$ и $c_{i+1} - c_i = c_i(c_{i+1} + 1)(c_i - x_1)(c_i - x_2) < 0$, то $c_i \downarrow -1$, което противоречи на това, че A е крайно множество.

И така, единствените елементи на A могат да бъдат 0, -1, x_1 и x_2. Непосредствено се проверява, че A е някое от множествата $\{x_1\}$, $\{x_2\}$, $\{x_1, x_2\}$, $\{0, -1\}$, $\{0, -1, x_1\}$, $\{0, -1, x_2\}$ и $\{0, -1, x_1, x_2\}$.

Задачите са предложени от:

Петър Бойваленков - 9.1, 9.3; Ивайло Кортезов - 8.2, 8.4; Иван Тонов - 8.1, 8.3; Николай Белухов - 9.4; Иван Ланджев - 10.1, 10.4; Стоян Атанасов - 9.2, 10.2; Керопе Чакърян - 10.3; Александър Иванов - 11.3, 11.4; Емил Колев - 11.1, 11.2; Николай Николов - 12.3, 12.4; Олег Мушкаров - 12.1, 12.2.

Брошурата е подготвена от Емил Колев

estoyanov.net