Задача 10.1. Нека x е реално число от интервала $[0,1]$. Да се реши уравнението

$$\sqrt{x}+\sqrt{\sqrt{x}}+\sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}}+\cdots+\underbrace{\sqrt{\sqrt{\cdots\sqrt{x}}}}_{2014\ \text{корена}}=2014x.$$

Решение. Очевидно $x=0$ и $x=1$ са решения. Нека $x\in(0,1)$. Тогава от неравенството $\sqrt{x}>x$ следва, че всеки от събираемите отляво е поне x и оттам лявата страна е винаги по-голяма от дясната.

Оценяване. (6 точки) 2 т. за намиране на решенията; 2 т. за оценката $\sqrt{x} > x$ при $x \in (0, 1)$; 2 т. за довършване.

Задача 10.2. Построени са графиките на две квадратни функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ със старши коефициенти $\frac{1}{2}$ и -3 съответно, като $f_1(x)$ има корени 2 и 5, а $f_2(x)$ има корени -2 и 1. Една мравка стартира от точка P, която лежи върху точно една от тези графики, и се движи по тях, без да се връща назад. Всеки път, когато достигне пресечна точка на двете графики, мравката сменя графиката, по която върви, като избира посоката си върху новата графика произволно. Какви трябва да бъдат координатите на началната точка P, за да може мравката да се върне обратно в нея?

Решение. Пресмятаме в явен вид двете функции: $f_1(x) = \frac{1}{2}(x-2)(x-5) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{2}x + 5$ и $f_2(x) = -3(x+2)(x-1) = -3x^2 - 3x + 6$.

Пресечните точки на двете параболи намираме чрез корените на функцията

$$g(x) = f_1(x) - f_2(x) = (\frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{2}x + 5) - (-3x^2 - 3x + 6) =$$

$$= \frac{7}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 1 = \frac{7}{2}\left(x - \frac{1-\sqrt{57}}{14}\right)\left(x - \frac{1+\sqrt{57}}{14}\right).$$

Старшият коефициент на $f_1(x)$ е положителен и следователно параболата $f_1(x)$ е "обърната нагоре". Старшият коефициент на $f_2(x)$ е отрицателен и следователно параболата $f_2(x)$ е "обърната надолу".

Ако мравката тръгне от точка P с абсциса, която не принадлежи на интервала $I = (\frac{1-\sqrt{57}}{14}, \frac{1+\sqrt{57}}{14})$, то тя или ще отиде в безкрайността, движейки се по параболата, от която е започнала, или ще стигне до кръстопът. Сменяйки параболата, тя или ще отиде в безкрайността, движейки се по другата парабола, или ще стигне до другия кръстопът. Повтаряйки това разсъжение няколко пъти, виждаме, че мравката или ще отиде в безкрайността по някоя от параболите, или ще остане затворена в цикъла между двете, като посоката на въртене в този цикъл е такава, че тя не може да се върне в P.

Ако мравката тръгне от точка P с абсциса, която принадлежи на I, то тя ще може да се върне обратно в P след като мине през два кръстопътя. Следователно, търсените координати са от вида $(a, \frac{1}{2}a^2 - \frac{7}{2}a + 5)$ или $(a, -3a^2 - 3a + 6)$, където $a \in (\frac{1-\sqrt{57}}{14}, \frac{1+\sqrt{57}}{14})$.

Оценяване. (6 точки) 1 т. за явния вид на f_1 и f_2; 1 т. за намиране на пресечните точки на техните графики; 3 т. за доказателство, че точките P с абсциса извън I не вършат работа; 1 т. за доказателство, че точките P с абсциса в I вършат работа и тяхното описание.

Задача 10.3. Да се докаже, че за всяко нечетно просто число p числата 2^p-2 и

$$p(p-1)!\left(-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{p-1}\right)$$

дават един и същи остатък при деление на p^2.

Решение. Имаме, че

$$2^p-2=(1+1)^p-2=\sum_{i=1}^{p-1}\binom{p}{i}=p\left(\sum_{i=1}^{p-1}\frac{(p-1)(p-2)\dots(i+1)}{(p-i)!}\right).$$

Нека x е остатъкът на числото $\sum_{i=1}^{p-1}\frac{(p-1)(p-2)\dots(i+1)}{(p-i)!}$ при деление на p. Остава да покажем, че остатъкът на $(p-1)!\sum_{i=1}^{p-1}(-1)^i i^{-1}$ при деление на p също е равен на x.

Имаме

$$\sum_{i=1}^{p-1}\frac{(p-1)(p-2)\dots(i+1)\cdot(p-1)!}{(p-i)!}\equiv x(p-1)! \pmod p,$$

откъдето, съгласно теоремата на Уилсън,

$$\sum_{i=1}^{p-1}\{(p-1)(p-2)\dots(i+1)\cdot(p-1)(p-2)\dots(p-i+1)\}\equiv x(p-1)!\equiv -x \pmod p.$$

От друга страна, теоремата на Уилсън ни дава и

$$\sum_{i=1}^{p-1}\{(p-1)\dots(i+1)\cdot(p-1)\dots(p-i+1)\}\equiv\sum_{i=1}^{p-1}\{(p-1)\dots(i+1)\cdot(-1)^{i-1}(i-1)!\}\equiv$$

$$\equiv\sum_{i=1}^{p-1}(-1)^{i-1}\frac{(p-1)!}{i}\equiv(p-1)!\sum_{i=1}^{p-1}(-1)^{i-1}i^{-1} \pmod p.$$

Следователно, $(p-1)!\sum_{i=1}^{p-1}(-1)^i i^{-1}\equiv x \pmod p$, с което задачата е решена.

Оценяване. (7 точки) 2 т. за представяне на 2^p-2 във вида $(1+1)^p-2$ и разкриване на скобите; 4 т. за подходящо преобразуване на така получения израз с помощта на теоремата на Уилсън; 1 т. за довършване.

Задача 10.4. Даден е остроъгълен $\triangle ABC$ с ортоцентър H, център I на вписаната окръжност и център I_c на външновписаната окръжност ω_c срещу C. Нека $HI\cap AB=$

D, $CD \cap I_cH = E$, CC_1 е височина в $\triangle ABC$, точката F е проекцията на I върху правата AB, и $EC_1 \cap CF = M$. Да се докаже, че M лежи на ω_c.

Решение. Нека k е окръжността с център H и радиус HC_1. Тогава D е външният център на хомотетия за ω и k, а C е външният център на хомотетия за ω и ω_c. Съгласно теоремата за трите хомотетии, външният център на хомотетия X за ω_c и k лежи на DC. Но X лежи също така и на I_cH и следователно $X \equiv E$.

Нека l е допирателната към ω_c, която е успоредна на AB и не съвпада с AB, и нека l допира ω_c в M'. Разглеждаме хомотетии h_1 с център E и h_2 с център C, такива че h_1 изобразява k в ω_c и h_2 изобразява ω в ω_c. Тогава h_1 изобразява C_1 в M' и h_2 изобразява F в M'; следователно, $M \equiv M'$ и значи $M \in \omega_c$, както се искаше.

Оценяване. (7 точки) 1 т. за въвеждане на k; 3 т. за подходящо прилагане на теоремата за трите хомотетии; 3 т. за въвеждане на M' и доказателство, че тя съвпада с M.