Задача 11.1. Дадена е окръжност k с център O и точка A извън окръжността. От A са построени допирателни AX и AY $(X, Y \in k)$, а точките P и Q от правите AX и AY (P е между A и X, а Y е между A и Q) са такива, че $OP = OQ$. Да се докаже, че средата на отсечката PQ е върху отсечката XY.

Решение. Нека R е средата на PQ. Тогава $\sphericalangle ORQ = \sphericalangle OYQ = 90^\circ$. Следователно четириъгълникът $OQYR$ е вписан в окръжност, откъдето $\sphericalangle QRY = \sphericalangle QOY$. Аналогично $\sphericalangle PRX = \sphericalangle POX$.

Тъй като $\triangle OYQ \cong \triangle OXP$, то $\sphericalangle QOY = \sphericalangle POX$. Следователно $\sphericalangle QRY = \sphericalangle PRX$, което означава, че точките X, R, Y лежат на една права.

Оценяване. (6 точки) 2 т. за подобните триъгълници OYQ и OXP, по 1 т. за двата вписани четириъгълника $OQYP$ и $OXPR$, 2 т. за доказване, че X, Y и R лежат на една права.

Задача 11.2. Нека a е реален параметър. Какъв е минималният брой цели решения на неравенството

$$\frac{2x^2 + (3a^2 + 1)x - 2a^2 + 4a - 6}{x^2 + (a^2 + a - 3)x - a^2 + 2a - 3} < 1?$$

Неравенството от условието е еквивалентно на

$$\frac{x^2 + (2a^2 - a + 4)x - a^2 + 2a - 3}{x^2 + (a^2 + a - 3)x - a^2 + 2a - 3} < 0.$$

За квадратните тричлени $f(x) = x^2 + (2a^2 - a + 4)x - a^2 + 2a - 3$ и $g(x) = x^2 + (a^2 + a - 3)x - a^2 + 2a - 3$ имаме $f(0) = g(0) = -a^2 + 2a - 3$, където $-a^2 + 2a - 3 = -(a-1)^2 - 2 < 0$

за всяко a. Следователно, уравненията $f(x)=0$ и $g(x)=0$ имат корени съответно $x_1<0<x_2$ и $x'_1<0<x'_2$. Тъй като $x'_1x'_2=x_1x_2$ и $x'_1+x'_2-(x_1+x_2)=a^2-2a+7=(a-1)^2+6>0$, разположението на корените е $x_1<x'_1<0<x_2<x'_2$. Тогава решенията на неравенството са $x\in(x_1,x'_1)\cup(x_2,x'_2)$, като сбора от дължините на двата интервала е $a^2-2a+7=(a-1)^2+6\geq 6$.

Директно се проверява, че при $a=1$ (тогава $x_1=\dfrac{-5-\sqrt{33}}{2}$, $x_2=\dfrac{-5+\sqrt{33}}{2}$, $x'_1=-1$, $x'_2=2$, като $-6<x_1<-5$ и $0<x_2<1$) решенията са $-5,-4,-3,-2$ и 1, т.е. 5 решения. При $a\neq 1$ сбора на дължините на двата интервала е по-голям от 6 и като използваме, че затворен интервал с дължина естествено число t съдържа поне t цели числа, лесно се вижда, че тези два интервала съдържат поне 5 цели числа.

Оценяване. (6 точки) 1 т. за записване във вида $\frac{x^2+(2a^2-a-4)x-a^2+2a-3}{x^2+(a^2+a-3)x-a^2+2a-3}<0$; 1 т. за заключението, че $f(x)=0$ и $g(x)=0$ имат корени; 1 т. за разположението на корените $x_1<x'_1<0<x_2<x'_2$; 1 т. за пример, при който неравенството има точно 5 решения; 2 т. за доказателство, че неравенството винаги има поне 5 цели решения.

Задача 11.3. Дадени са n безкрайни аритметични прогресии $A_1,A_2,\ldots,A_n$ от естествени числа с разлики съответно $b_1,b_2,\ldots,b_n$. Ако $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=N$, където N е множеството на естествените числа, да се докаже, че едно от числата $b_1,b_2,\ldots,b_n$ дели най-малкото общо кратно на останалите числа.

Решение. Да допуснем, че всяко от числата $b_1,b_2,\ldots,b_n$ не дели най-малкото общо кратно на останалите числа. Тогава за всяко $i=1,2,\ldots,n$ имаме $b_i>1$, като съществува просто число p_i, степента на което в каноничното разлагане на b_i е по-висока от степента на p_i в каноничното разлагане на всяко от останалите числа.

Ако $a_1,a_2,\ldots,a_n$ са първите членове на дадените прогресии, от китайската теорема за остатъците следва, че съществува естествено число k, за което $k\equiv a_i+1 \pmod{p_i}$ за всяко $i=1,2,\ldots,n$. Тогава $k\notin A_i$ за всяко $i=1,2,\ldots,n$, противоречие.

Оценяване. (7 точки) 2 т. за съществуване на (при допускане на противното) просто число p_i, степента на което в каноничното разлагане на b_i е по-висока от степента на p_i в каноничното разлагане на всяко от останалите числа; 4 т. за използване на китайската теорема за остатъците за намиране число с определени свойства; 1 т. за довършване на решението.

Задача 11.4. В изпъкнал 2014-ъгълник са прекарани 1007 диагонала така, че всеки връх е край на точно един диагонал, всеки два диагонала се пресичат във вътрешна точка и никои три диагонала не се пресичат в една точка. Тези диагонали разделят вътрешността на 2014-ъгълника на изпъкнали многоъгълници. Колко най-малко от тези многоъгълници могат да са триъгълници?

Решение. Ще решим задачата в общия случай за $2n$-ъгълник при $n \geq 2$.

Лема 1. Диагоналите от условието разделят вътрешността на $2n$-ъгълника на $\frac{n^2+n+2}{2}$ изпъкнали многоъгълника.

Доказателство. След построяване на един диагонал имаме два изпъкнали многоъгълника. След построяване на два диагонала имаме 4 изпъкнали многоъгълника, като построяването на k-ия диагонал добавя (тъй като той пресича всички построени до този момент $k-1$ диагонала) k нови многоъгълника. Тогава търсеният брой е равен на

$$1+1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}+1=\frac{n^2+n+2}{2}.$$

Тъй като всяка страна на дадения $2n$-ъгълник е страна на точно един многоъгълник от разделянето, от Лема 1 следва, че броят на многоъгълниците, които нямат обща страна с дадения $2n$-ъгълник е

$$\frac{n^2+n+2}{2}-2n=\frac{n^2-3n+2}{2}.$$

Страна на изпъкнал многоъгълник без успоредни страни ще наричаме *интересна*, ако многоъгълника се съдържа в триъгълника образуван от тази страна и правите, определени от двете съседни страни.

Лема 2. Във всеки изпъкнал многоъгълник, който не е триъгълник, съществуват най-много две интересни страни.

Доказателство. Да допуснем, че съществуват три интересни страни. Тогава ще имаме поне две различни двойки ъгли на многоъгълника със сбор на двата ъгъла в двойката по-малък от 180°, и сборът на четирите ъгъла в двете двойки ще е по-малък от 360°. Тъй като сборът на ъглите в изпъкнал m-ъгълник е $(m-2)180^\circ$, то сборът на останалите $m-4$ ъгъла ще е е поне $(m-4)180^\circ$. Това означава, че поне един от тези ъгли ще е по-голям от 180°, т.е. многоъгълника няма да е изпъкнал: противоречие.

Понеже всеки два от дадените диагонала се пресичат, то броят на пресечните точки върху всеки диагонал е $n-1$ и следователно върху всеки диагонал има $n-2$ вътрешни отсечки (т.е. отсечки, чиито краища не са върхове на дадения $2n$-ъгълник). Всяка такава отсечка е страна на два изпъкнали многоъгълника, като тя е интересна за точно един от тези два многоъгълника. Следователно, броят на интересните страни е $n(n-2)$.

Разглеждаме само многоъгълниците, които нямат обща страна с дадения $2n$-ъгълник. Нека измежду тези многоъгълници има x триъгълника и y многоъгълника с повече от три страни. Имаме $x+y=\dfrac{n^2-3n+2}{2}$, като броят на интересните страни е най-много $3x+2y$ (всеки триъгълник има три интересни страни). Тогава

$$3x+2y \geq n(n-2) \Leftrightarrow x \geq n(n-2) - 2(x+y) \Leftrightarrow x \geq n(n-2) - (n^2-3n+2) = n-2.$$

Остава да забележим, че триъгълниците, които имат обща страна с дадения $2n$-ъгълник са поне 3 (тъй като всяка точка от изпъкналата обвивка на пресечните точки на всички диагонали е връх на точно един такъв триъгълник, а изпъкналата обвивка е поне триъгълник).

Окончателно имаме поне $n-2+3=n+1$ триъгълника и остава да построим пример с точно $n+1$ триъгълника.

Върху дадена права l да изберем $n-1$ точки $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$, като $A_1A_2 = A_2A_3 = \cdots = A_{n-2}A_{n-1}$ и нека α е ъгъл, за който $(n-1)\alpha < 90^\circ$. Да построим през точката A_i права l_i, която сключва с правата l ъгъл $i\alpha$. Лесно се вижда, че всяка права след l_2 добавя един нов триъгълник и следователно броят на триъгълниците е $n-2$. Сега да разгледаме достатъчно голяма окръжност, която съдържа всички пресечни точки на дадените прави. Де изберем пресечните точки на тази окръжност с дадените прави за върхове на $2n$-ъгълника.

Лесно се вижда, че само пресечните точки на l и l_1; l и l_{n-1}; l_{n-1} и l_{n-2} са върхове на триъгълници, имащи обща страна с $2n$-ъгълника. Общият брой на триъгълниците е $n+1$. При $n=1007$ имаме поне 1008 триъгълника.

Оценяване. (7 точки) 1 т. за Лема 1; 1 т. за Лема 2; 2 т. за доказателство, че вътрешните триъгълници са поне $n-2$; 1 т. за наблюдението, че триъгълниците, които имат обща страна с дадения $2n$-ъгълник са поне 3; 2 т. за пример с точно $n+1$ триъгълника.