Задача 12.1. Нека $a_n = \dfrac{4(2n)^4+1}{4(2n-1)^4+1}$ $(n \in \mathbb{N})$. Да се намери
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 a_2 \cdot a_n}{n^2}.$$

Решение. Понеже $2x^2+2x+1 = 2(x+1)^2 - 2(x+1)+1$, то
$$a_n = \frac{[2(2n)^2+2.2n+1].[2(2n)^2-2.2n+1]}{[2(2n-1)^2+2.(2n-1)+1].[2(2n-1)^2-2.(2n-1)+1]}$$
$$= \frac{2(2n+1)^2-2.(2n+1)+1}{2(2n-1)^2-2.(2n-1)+1},$$
откъдето $a_1 a_2 \dots a_n = \dfrac{2(2n+1)^2-2.(2n+1)+1}{2.1^2-2.1+1}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1 a_2 \dots a_n}{n^2} = 8$.

Оценяване. (6 точки) 3 т. за формулата за a_n; 2 т. за формулата за $a_1a_2\dots a_n$; 1 т. за намиране на границата.

Задача 12.2. Точки M и N лежат на страната AB на $\triangle ABC$. Допирателните през M и N към описаните окръжности около $\triangle ACM$ и $\triangle BCN$ пресичат отсечките CN и CM съответно в точки P и Q. Ако $ABPQ$ е равнобедрен трапец, да се докаже, че $AC = BC$.

Решение. Нека $PQ \cap AC = E$ и $PQ \cap BC = F$. Тогава $\sphericalangle CEQ = \sphericalangle CAM = \sphericalangle CMP$ и значи $CEMP$ е вписан в окръжност четириъгълник. Аналогично $CFNQ$ е вписан в окръжност четириъгълник. Тогава $\sphericalangle MEQ = \sphericalangle PCQ = \sphericalangle NFP$ и следователно $EFNM$ е равнобедрен трапец.

Ако $O_1 = AQ \cap ME$ и $O_2 = BP \cap NF$, то

$$\triangle AMO_1 \sim \triangle QEO_1 \sim \triangle PFO_2 \sim \triangle BNO_2$$

и значи

$$\frac{AM}{BN} = \frac{EQ}{FP} = \frac{EO_1}{FO_2} = \frac{O_1M}{O_2N} = \frac{EM}{FN} = 1.$$

Тогава $\triangle AME \cong \triangle BNF$ (по първи признак), откъдето $\sphericalangle MAE = \sphericalangle NBF$, т.е. $AC = BC$.

Оценяване. (6 точки) 2 т. за $EM = FN$; 3 т. за $AM = BN$; 1 т. за $AC = BC$.

Задача 12.3. Да се намери най-малкото естествено число n, за което уравнението

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{n}{4z^2+1}$$

няма решение в естествени числа x, y, z.

Решение. При $n = 1$, 2, 3 имаме решения съответно $x = y = 10$, $z = 1$, $x = y = 5$, $z = 1$, и $x = 10$, $y = 2$, $z = 1$.

Ще докажем, че при $n = 4$ уравнението няма решение. Записваме го във вида

$$(x+y)(4z^2+1) = 4xy.$$

Нека $x = 2^a x_1$, $y = 2^b y_1$, където $a, b \geq 0$ и x_1, y_1 са нечетни числа. Ако $a > b$, то

$$(2^{a-b}x_1 + y_1)(4z^2+1) = 4 \cdot 2^a x_1 y_1,$$

което е невъзможно, защото лявата страна е нечетно число. Аналогично случаят $b > a$ е невъзможен. Следователно $a = b$ и

$$(x_1 + y_1)(4z^2+1) = 4 \cdot 2^a x_1 y_1.$$

Тогава $x_1 + y_1$ се дели на 4 и значи x_1 и y_1 са нечетни числа, които дават различни остатъци при деление на 4. Нека $x_1 = 4x_2 + 1$, $y_1 = 4y_2 - 1$. Тогава y_1 има прост делител p от вида $4k - 1$, който дели $4z^2 + 1$, което е невъзможно.

Оценяване. (7 точки) 1 т. за намиране на решения за $n = 1, 2, 3$; 2 т. за $a = b$; 3 т. за доказателство, че има просто число от вида $4k - 1$, което дели $4z^2 + 1$; 1 т. за довършване.

Задача 12.4. Виж задача 11.4.

Задача 11.4. В изпъкнал 2014-ъгълник са прекарани 1007 диагонала така, че всеки връх е край на точно един диагонал, всеки два диагонала се пресичат във вътрешна точка и никои три диагонала не се пресичат в една точка. Тези диагонали разделят вътрешността на 2014-ъгълника на изпъкнали многоъгълници. Колко най-малко от тези многоъгълници могат да са триъгълници?

Решение. Ще решим задачата в общия случай за $2n$-ъгълник при $n \geq 2$.

Лема 1. Диагоналите от условието разделят вътрешността на $2n$-ъгълника на $\frac{n^2+n+2}{2}$ изпъкнали многоъгълника.

Доказателство. След построяване на един диагонал имаме два изпъкнали многоъгълника. След построяване на два диагонала имаме 4 изпъкнали многоъгълника, като построяването на k-ия диагонал добавя (тъй като той пресича всички построени до този момент $k-1$ диагонала) k нови многоъгълника. Тогава търсеният брой е равен на

$$1 + 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} + 1 = \frac{n^2 + n + 2}{2}.$$

Тъй като всяка страна на дадения $2n$-ъгълник е страна на точно един многоъгълник от разделянето, от Лема 1 следва, че броят на многоъгълниците, които нямат обща страна с дадения $2n$-ъгълник е

$$\frac{n^2 + n + 2}{2} - 2n = \frac{n^2 - 3n + 2}{2}.$$

Страна на изпъкнал многоъгълник без успоредни страни ще наричаме *интересна*, ако многоъгълника се съдържа в триъгълника образуван от тази страна и правите, определени от двете съседни страни.

Лема 2. Във всеки изпъкнал многоъгълник, който не е триъгълник, съществуват най-много две интересни страни.

Доказателство. Да допуснем, че съществуват три интересни страни. Тогава ще имаме поне две различни двойки ъгли на многоъгълника със сбор на двата ъгъла в двойката по-малък от 180°, и сборът на четирите ъгъла в двете двойки ще е по-малък от 360°. Тъй като сборът на ъглите в изпъкнал m-ъгълник е $(m-2)180^\circ$, то сборът на останалите $m - 4$ ъгъла ще е е поне $(m-4)180^\circ$. Това означава, че поне един от тези ъгли ще е по-голям от 180°, т.е. многоъгълника няма да е изпъкнал: противоречие.

Понеже всеки два от дадените диагонала се пресичат, то броят на пресечните точки върху всеки диагонал е $n-1$ и следователно върху всеки диагонал има $n-2$ вътрешни отсечки (т.е. отсечки, чиито краища не са върхове на дадения $2n$-ъгълник). Всяка такава отсечка е страна на два изпъкнали многоъгълника, като тя е интересна за точно един от тези два многоъгълника. Следователно, броят на интересните страни е $n(n-2)$.

Разглеждаме само многоъгълниците, които нямат обща страна с дадения $2n$-ъгълник. Нека измежду тези многоъгълници има x триъгълника и y многоъгълника с повече от три страни. Имаме $x+y=\dfrac{n^2-3n+2}{2}$, като броят на интересните страни е най-много $3x+2y$ (всеки триъгълник има три интересни страни). Тогава

$$3x+2y \geq n(n-2) \Leftrightarrow x \geq n(n-2)-2(x+y) \Leftrightarrow x \geq n(n-2)-(n^2-3n+2)=n-2.$$

Остава да забележим, че триъгълниците, които имат обща страна с дадения $2n$-ъгълник са поне 3 (тъй като всяка точка от изпъкналата обвивка на пресечните точки на всички диагонали е връх на точно един такъв триъгълник, а изпъкналата обвивка е поне триъгълник).

Окончателно имаме поне $n-2+3=n+1$ триъгълника и остава да построим пример с точно $n+1$ триъгълника.

Върху дадена права l да изберем $n-1$ точки $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$, като $A_1A_2=A_2A_3=\cdots=A_{n-2}A_{n-1}$ и нека α е ъгъл, за който $(n-1)\alpha<90^\circ$. Да построим през точката A_i права l_i, която сключва с правата l ъгъл $i\alpha$. Лесно се вижда, че всяка права след l_2 добавя един нов триъгълник и следователно броят на триъгълниците е $n-2$. Сега да разгледаме достатъчно голяма окръжност, която съдържа всички пресечни точки на дадените прави. Де изберем пресечните точки на тази окръжност с дадените прави за върхове на $2n$-ъгълника.

Лесно се вижда, че само пресечните точки на l и l_1; l и l_{n-1}; l_{n-1} и l_{n-2} са върхове на триъгълници, имащи обща страна с $2n$-ъгълника. Общият брой на триъгълниците е $n+1$. При $n=1007$ имаме поне 1008 триъгълника.

Оценяване. (7 точки) 1 т. за Лема 1; 1 т. за Лема 2; 2 т. за доказателство, че вътрешните триъгълници са поне $n-2$; 1 т. за наблюдението, че триъгълниците, които имат обща страна с дадения $2n$-ъгълник са поне 3; 2 т. за пример с точно $n+1$ триъгълника.