Условия, кратки решения и критерии за оценяване

Задача 8.1. Нека $CL (L \in AB)$ е ъглополовяща в триъгълника ABC, като $AC = CL$. Точката K лежи на лъча $CL^{\to}$, така че $\sphericalangle CAL + \sphericalangle CAK = 180°$. Да се докаже, че $BC = CK$.

Решение. Понеже $\sphericalangle CLA = \sphericalangle CAL$, то $\sphericalangle CLB = \sphericalangle CAK$. Оттук и от условието следва, че триъгълниците CAK и CLB са еднакви, откъдето $BC = CK$.

Оценяване. (6 точки) 2 т. за $\sphericalangle CLB = \sphericalangle CAK$; 4 т. за $CAK \simeq CLB$ и довършване.

Задача 8.2. а) Да се докаже, че ако a, b са числа от интервала $[0;1]$ и $a + b \le 1$, то $a^2 + b^2 \le 1$.

б) Сред числата x, y, z всеки две не се различават с повече от единица и $xy + yz + zx = 96$. Да се намерят най-малката и най-голямата стойност на израза $A = x^2 + y^2 + z^2$.

Решение. а) $a^2 + b^2 \le a^2 + (1 - a)^2 = 2a(a - 1) + 1 \le 1$.

б) Имаме $(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 \ge 0$, откъдето $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 \ge 2xy + 2yz + 2zx$. Оттук $x^2 + y^2 + z^2 \ge xy + yz + zx = 96$, като равенство се достига при $x = y = z = 4\sqrt{2}$. Следователно най-малката стойност на A е 96.

Да намерим най-голямата стойност на A. Без ограничение на общността $x \le y \le z$. Тогава $z - y + y - x = z - x \le 1$ и според а) $(z - y)^2 + (y - x)^2 + (z - x)^2 \le 1 + 1$. След деление на 2 получаваме $A = x^2 + y^2 + z^2 \le 1 + xy + yz + zx = 97$. Равенство се достига например при $x = 5$, $y = z = 6$. Следователно най-голямата стойност на A е 97.

Оценяване. (6 точки) 1 т. за подточка а); в подточка б), 1 т. за $x^2 + y^2 + z^2 \ge 96$ и 1 т. за случая на равенство; 2 т. за $x^2 + y^2 + z^2 \le 1 + xy + yz + zx = 97$ и 1 т. за случая на равенство.

Задача 8.3. За всяка двойка естествени числа $(m; n)$ полагаме $m@n = |37^m - 29^n|$.

а) Съществува ли двойка естествени числа $(m; n)$, такава че $m@n = 2014$?

б) Да се намери най-малката стойност на израза $m@n$.

Решение. а) Понеже всяко от числата 37^m и 29^n при деление с 4 дава остатък 1, то $m@n$ винаги ще се дели на 4, т.е. не може да е равно на 2014.

б) Явно $m@n > 0$; от а) видяхме, че $m@n$ се дели на 4; при $m = n = 1$ стойността му е 8. Ще покажем, че това е най-малката стойност, като се уверим, че $m@n$ не е равно на 4.

Ако $37^m - 29^n = 4$, то $37^m - 4 = 29^n$; числото вляво се дели на 3, а вдясно – не.

Ако $37^m - 29^n = -4$, то $29^n - 37^m = 4$. Последна цифра 4 е възможна само ако последната цифра на 29^n е 1, а на 37^m е 7, т.е. $n = 2k$. Тогава $37^m = (29^k - 2)(29^k + 2)$, което е невъзможно, понеже множителите са взаимно прости, а 37 е просто число.

Оценяване. (7 точки) 2 т. за подточка а); в подточка б), 1 т. за пример; 2 т. за отхвърляне на случая $37^m - 29^n = 4$; 1 т. за наблюдението, че m и n са четни в случая $37^m - 29^n = -4$ и 1 т. за довършване на този случай.

Задача 8.4. Ани начертала на бял лист 88 отсечки. Колко най-много равностранни триъгълници може да има на листа? Отговорът да се обоснове.

Решение. Нека разгледаме конструкция с максимален брой равностранни триъгълници; явно в нея има поне един триъгълник.

Ще наричаме две отсечки сравними, ако правите им образуват ъгъл, кратен на 60°. Така отсечките се разпадат на множества от сравними помежду си отсечки.

Да допуснем, че тези множества са повече от 1. Отсечки от различни множества не могат да участват в един равностранен триъгълник. Ще считаме, че всяко множество от сравними отсечки е начертано на отделен прозрачен лист и листовете са поставени един върху друг. Да завъртим под еднакъв ъгъл един лист, така че една от отсечките на него да отсече равностранно триъгълниче от равностранен триъгълник от друг лист (в който има такъв). При това броят равностранни триъгълници нараства – противоречие. Следователно има само един лист, т.е., всички отсечки са сравними.

Тогава отсечките могат да имат само три направления (под ъгъл 60°); нека в тях да има съответно x, y, z отсечки, $x \leq y \leq z$, $x + y + z = 88$.

За всеки равностранен триъгълник са нужни отсечки от трите направления, така че броят на триъгълниците не надхвърля xyz, като е равен на това число, ако всички отсечки от различни направления се пресичат в различни точки.

Да допуснем, че $z - x \geq 2$ и да премахнем една отсечка от най-масовия клас, добавяйки я в най-малкия, така че да пресича всички отсечки от останалите класове в различни точки; при това се губят xy триъгълника и се печелят $y(z-1) > xy$, което противоречи на максималността. Така $z - x \leq 1$ и като отчетем $x \leq y \leq z$ и $x + y + z = 88$, получаваме $x = y = 29$, $z = 30$, и търсеният максимален брой е $xyz = 25230$.

Оценяване. (7 точки) 1 т. въвеждане на класовете от сравними помежду си отсечки; 1 т. за наблюдението, че не може да има повече от един такъв клас; 1 т. за условията, при които се достига брой триъгълници xyz; 3 т. за наблюдението, че x, y, z се различават с не повече от единица; 1 т. за пример.