Задача 9.1. Да се намерят всички стойности на реалния параметър a, за които уравнението $x^2 + 2(a+1)x + a^2 = 0$ има два различни реални корена x_1 и x_2, такива, че

$$|4x_1x_2 - (x_1 + x_2)^2| \leq 1.$$

Решение. За да има уравнението два различни реални корена е необходимо и достатъчно дискриминантата му да е положителна, т.е. $(a+1)^2 - a^2 > 0 \Leftrightarrow 2a + 1 > 0 \Leftrightarrow$

$a \in (-\frac{1}{2}; +\infty)$.

От формулите на Виет, $|4x_1x_2-(x_1+x_2)^2| \leq 1 \Leftrightarrow |4(2a+1)| \leq 1$, откъдето $2a+1 \leq \frac{1}{4}$ (използвахме, че $2a+1 > 0$ от по-горе). Следователно $a \leq -\frac{3}{8}$ и окончателно търсените a са числата от интервала $(-\frac{1}{2}; -\frac{3}{8}]$.

Забележка. Неравенството от условието може да бъде формулирано и като изискване за разстоянието между корените на уравнението.

Оценяване. (6 точки) 1 т. за условието уравнението да има два различни реални корена; 2 т. за прилагане на формулите на Виет; 1 т. за премахване на модула; 2 т. за довършване.

Задача 9.2. Да се намерят всички цели числа n, за които съществува цяло число m, такова, че n^2+n-1 дели както $14m+5$, така и $20m-3$.

Решение. От условието следва, че n^2+n-1 дели $10(14m+5)-7(20m-3) = 71$.

Тъй като $n^2+n-1 = (n+\frac{1}{2})^2 - \frac{5}{4} > -2$ и 71 е просто число, имаме три възможности: $n^2+n-1 = -1$, 1 или 71.

В първия и втория случай намираме $n = -1$, 0, 1 и -2, които са решения (работа върши всяко цяло m).

В третия случай, уравнението $n^2+n-1 = 71$ има корени $n = -9$ и $n = 8$. Тогава $14m+5 \equiv 0 \pmod{71}$ след умножение по 5 е равносилно с $m \equiv 25 \pmod{71}$, а $20m-3 \equiv 0 \pmod{71}$ след умножение по 32 е равносилно отново с $m \equiv 25 \pmod{71}$, т.е. работа вършат точно тези m, които дават остатък 25 при деление на 71.

Оценяване. (6 точки) 1 т. за $n^2+n-1 \mid 71$; 1 т. за разбиването на случаи; 1 т. за намиране на тривиалните решения -1, 0, 1 и -2, 3 т. за доказване, че -9 и 8 също са решения; общо 1 т., ако са посочени решенията, но липсва обосновка, че няма други.

Задача 9.3. Четириъгълникът $ABCD$ е описан около окръжност с радиус r, а точките M и N са среди на AB и CD. Да се докаже, че $MN \geq 2r$.

Първо решение: Имаме последователно

$$\begin{aligned} 2r \cdot (AB+CD) &= r \cdot (AB+BC+CD+DA) = 2S_{ABCD} = \\ &= [S_{ABC}+S_{ABD}] + [S_{CDA}+S_{CDB}] = \\ &= 2S_{ABN} + 2S_{CDM} \leq MN \cdot AB + MN \cdot CD = \\ &= MN \cdot (AB+CD), \end{aligned}$$

откъдето следва исканото.

Второ решение: Нека ω е вписаната окръжност на $ABCD$, ω_1 е окръжността, която допира отсечката AB и продълженията на правите AD и BC след A и B, ω_2

е окръжността, която допира отсечката CD и продълженията на правите BC и AD след C и D, s_1 е радикалната ос на ω и ω_1 и s_2 е радикалната ос на ω и ω_2. Тогава $s_1 \| s_2$, $M \in s_1$ и $N \in s_2$.

Нека d е разстоянието между правите s_1 и s_2. Понеже ω лежи между s_1 и s_2, имаме $2r \leq d \leq MN$, както се искаше.

Оценяване. (7 точки) (Първо решение) 1 т. за $r \cdot (AB + CD) = S_{ABCD}$; 3 т. за $S(ABCD) = S_{ABN} + S_{CDM}$; 3 т. за $S_{ABN} + S_{CDM} \leq MN \cdot AB + MN \cdot CD$.

Задача 9.4. Във всеки от върховете на един правилен 360-ъгълник F с център O е записано по едно естествено число, не по-голямо от 180, като при това сумата на всички записани числа е нечетна. Да се докаже, че могат да се намерят два върха A и B на F, такива, че разликата на записаните в тях числа е равна на градусната мярка на $\sphericalangle AOB$.

Решение. За всеки връх A на F, нека A' е този връх на F, за който градусната мярка на $\sphericalangle AOB$ е равна на числото, записано в A, и $\triangle AOB$ е положително ориентиран. За всяко A, да нарисуваме стрелка, сочеща от A към A'.

Ако две от тези стрелки сочат един и същи връх на F, то тогава техните начални върхове образуват двойка от вида, който се търси в задачата.

Да допуснем, че такава двойка няма. Тогава, понеже от всеки връх излиза точно една стрелка, то и във всеки връх трябва да влиза точно една стрелка. Следователно, стрелките образуват няколко независими цикъла.

Понеже всеки такъв цикъл извършва цял брой обороти около O, сумата от градусните мерки на стрелките, които участват в него, ще бъде кратна на 360. Оттук следва, че и сумата от градусните мерки на всички стрелки – която съвпада със сумата от всички записани числа – ще бъде кратна на 360: противоречие.

Оценяване. (7 точки) 1 т. за въвеждане на стрелките или еквивалентна конструкция; 2 т. за допускане на противното и преформулиране на допускането в термините на стрелките; 1 т. за въвеждане на циклите от стрелки; 2 т. за сумиране по тях; 1 т. за довършване.