Задача 8.1. а) Да се докаже тъждеството

$$(y-x)^3 - 3(y-x)x^2 - x^3 = -y^3 + 3y(x-y)^2 + (x-y)^3$$

б) Да се намери a, така че числата $x = 7$ и $y = 4$ да удовлетворяват уравнението $x^3 - 3xy^2 + y^3 = a$. За така намерената стойност на a, да се намерят още две целочислени решения на това уравнение.

Решение. а) Привеждаме в нормален вид двете части на равенството и получаваме, че всяка от тях е равна на $x^3 - 3xy^2 + y^3$.

б) Заместваме $x = 7$ и $y = 4$ и получаваме $a = 71$. Нека $P(x,y) = x^3 - 3xy^2 + y^3$. От тъждеството следва, че $P(x,y) = P(y-x,-x) = P(-y,x-y)$, което показва, че ако (x,y) е решения на уравнението, то $(y-x,-x)$ и $(-y,x-y)$ също са решения, т.е. от $x = 7, y = 4$, следва, че $x = -3, y = -7$ и $x = -4, y = 3$ също са решения.

Оценяване. (6 точки) 2 т. за а); 1 т. за намиране $a = 71$; 3 т. за намиране на решенията $x = -3, y = -7$ и $x = -4, y = 3$.

Задача 8.2. Във вътрешността на равнобедрен триъгълник ABC, $AC = BC$, е взета точка M, а върху отсечката AM е взета точка K, така че $\sphericalangle AMB = 2\sphericalangle CKM$. Да се докаже, че ако $CK = KM + BM$, то $\sphericalangle CKM = \sphericalangle ACB$.

Решение. Продължаваме BM до пресичането с CK в точка N. Триъгълникът KMN е равнобедрен, защото $\sphericalangle NKM = \sphericalangle KMN$, откъдето $KM + BM = BN$. Разглеждаме триъгълниците ACK и CBN. Имаме $AC = BC$ по условие, $CK = BN$ и $\sphericalangle AKC = \sphericalangle BNC$ като допълнителни към равни ъгли. Ще отбележим, че по тази причини те са тъпи ъгли. Следователно $\triangle AKC \cong \triangle CNB$, откъдето $\sphericalangle CAK = \sphericalangle BCN$. Оттук

$$\sphericalangle CKM = \sphericalangle CAK + \sphericalangle ACK = \sphericalangle BCK + \sphericalangle ACK = \sphericalangle ACB.$$

Оценяване. (6 точки) 1 т. за въвеждане на точката N; 1 т. за $CK = BN$; 2 т. за $\triangle AKC \cong \triangle CNB$; 2 т. за довършване на решението.

Задача 8.3. Да се намери най-малкото естествено число n, за което съществува естествено число x, такова че

$$(x+1)^3 + (x+2)^3 + (x+3)^3 + (x+4)^3 = (x+n)^3.$$

Решение. Нека x е естествено число, за което $(x+1)^3+(x+2)^3+(x+3)^3+(x+4)^3 = (x+n)^3$. От малката теорема на Ферма ($x^3 \equiv x \pmod 3$) следва, че $n \equiv 1 \pmod 3$. Най-малката възможност за n е 7. Тогава уравнението добива вида $x^3 + 3x^2 - 19x - 81 = 0$. Последното няма целочислени решения, защото последните могат да са само от вида 3^k, $k = 0,1,2,3,4$, които лесно се отхвърлят. Нека $n = 10$. Тогава уравнението добива вида $x^3 - 70x - 300 = 0$. Очевидно, ако x е естествено число, то x се дели на 2 и на 5, а $x = 10$ е решение на последното. Търсената стойност на n е 10.

Оценяване. (7 точки) 3 т. за $n \equiv 1 \pmod 3$; 2 т. за отхвърляне на случая $n = 7$; 2 т. за намиране на отговора $n = 10$.

Задача 8.4. На дъската са написани числата $1, 2, \ldots, n$, $n \geq 3$. Разрешена е следната операция: Избират се две числа a и b, изтриват се и на тяхно място се записват числата $a + b$ и $|a - b|$. Да се докаже, че е възможно да се направят краен брой такива операции така, че всички числа да станат равни на едно и също число и да се намерят всички възможни стойности за това число.

Решение. Да приемем, че на дъската в някакъв момент се получават еднакви числа. Ако $a + b$ и $|a - b|$ имат нечетен прост делител p, то и числата a и b се делят на p. Следователно числото, което остава накрая може да бъде само степен на двойката.

Ако на дъската имаме числата 0 и a, можем да получим чрез операцията $(0, a) \to (a, a) \to (0, 2a)$, т.е. числото a може да се удвои. Последното показва, че ако от дадените числа достигнем до числа, измежду които има 1 нула и останалите са степени на двойката, можем да достигнем до еднакви числа, които са равни на най-голямата степен на двойката от тях. Ще докажем по индукция, че при $n = 2^k + s$, $0 < s \leq 2^k$ можем да получим всички числа да са равни на 2^t за всяко $t \geq k$.

Нека $n = 3$. Понеже $(1, 2, 3) \to (2, 2, 4) \to (0, 4, 4)$ имаме база за индукцията. Приемаме, че $n = 2^k + s$, $0 \leq s < 2^k$. Случаят $s = 0$ се свежда до $n = 2^k - 1$. Ако $s > 0$ прилагаме операцията към двойките $(2^k - 1, 2^k + 1)$, $(2^k - 2, 2^k + 2), \ldots, (2^k - s, 2^k + s)$ и получаваме $2, 4, \ldots, 2s$ и s пъти 2^{k+1}. Числото 2^k не променяме и остават още $1, 2, \ldots, 2^k - s - 1$. За последните прилагаме индукционното предположение, а също така и за числата $2, 4, \ldots, 2s$. За да бъде решението окончателно ще разгледаме още случая $s = 1$ или $s = 2$. Но тогава остават числата 2 или 2 и 4, които са степени на двойката. Ако $2^k - s - 1 = 1$ или $2^k - s - 1 = 2$, то ще останат само числата 1 или 2. Продължаваме например така: $(1, 2, 4) \to (1, 3, 4) \to (2, 4, 4) \to (0, 2, 8)$. Следователно така можем да достигнем до числото 2^{k+1} и всички по-високи степени.

Оценяване. (7 точки) 1 т. за наблюдението, че числото, което остава може да бъда само степен на 2; 1 т. за $(0, a) \to (0, 2a)$; 1 т. за наблюдението, че ако има 0 и всички останали числа са степени на 2, можем да достигнем до равни числа; 1 т. за $(1, 2, 3) \to (0, 4, 4)$; 2 т. за индукцията; 1 т. за $(1, 2, 4) \to (0, 2, 8)$.

Задача 9.1. Да се намерят всички стойности на реалния параметър a, за които уравнението

$$\frac{a+2}{x-2} + \frac{a+3}{x-3} = \frac{a+5}{x-5}$$

има точно едно решение.

Решение. Уравнението има смисъл за $x \notin \{2, 3, 5\}$. След освобождаване от знаменател и опростяване получаваме квадратното уравнение

$$ax^2 - 2x(5a + 6) + 19a + 30 = 0.$$

При $a = 0$ разглежданото уравнение има единствено решение $x = 5/2$. Нека $a \neq 0$. Дискриминан тата $24(a^2 + 5a + 6)$ е равна на 0 при $a = -2$ и $a = -3$, но в тези случаи решенията са съответно $x = 2$ и $x = 3$, които не са в дефиниционното множество. Решение $x = 5$

на квадратното уравнение се получава при $a = -5$, което дава и $x = 13/5$. Следователно търсените стойности са $a = 0$ и $a = -5$.

Оценяване. (6 точки) 1 т. за получаване на квадратното уравнение, 1 т. за случая $a = 0$, 2 т. за разглеждане и отхвърляне на случаите на нулева дискриминанта, 2 т. за намиране и разглеждане на случая $a = -5$.

Задача 9.2. Върху страната AB на триъгълник ABC са построени точки D и E, а върху страната AC – точка F, така че $AD = AC$, $BE = BC$ и $AF = AE$. Ако $\sphericalangle ACB = 3.\sphericalangle EFD$, намерете градусната мярка на $\sphericalangle ACB$.

Решение. От $AF = AE$ и $AD = AC$ следва, че $EDCF$ е равнобедрен трапец и следователно е вписан в окръжност. Тогава

$$\begin{aligned} \sphericalangle EFD &= \sphericalangle ECD = 180^\circ - \sphericalangle ADC - \sphericalangle BEC = 180^\circ - 90^\circ + \frac{1}{2}\sphericalangle A - 90^\circ - \frac{1}{2}\sphericalangle B = \\ &= 90^\circ - \frac{1}{2}\sphericalangle ACB. \end{aligned}$$

Получаваме $\sphericalangle ACB = 3.\sphericalangle EFD = 270^\circ - \frac{3}{2}\sphericalangle ACB$, така че $\frac{5}{2}\sphericalangle ACB = 270^\circ$ и $\frac{5}{2}\sphericalangle ACB = 108^\circ$.

Оценяване. (6 точки) 1 т. за доказване, че $EDCF$ е вписан; 3 т. за доказване, че $\sphericalangle EFD = 90^\circ - \frac{1}{2}\sphericalangle ACB$; 2 т. за довършване.

Задача 9.3. Да се докаже, че уравнението $\sqrt{x} + \sqrt{y} = n + \sqrt{x+y}$, където n е естествено число, има решение в естествени числа x и y тогава и само тогава, когато n е четно число.

Решение. *Първи начин.* След двукратно повдигане на квадрат получаваме

$$4xy = n^2(n^2 + 4(x+y) + 4n\sqrt{x+y}).$$

Оттук следва, че $x+y$ е точен квадрат, след което е очевидно, че при нечетно n двете страни са от различна четност, т.е. уравнението няма решение.

Нека $n = 2k$ и $x + y = m^2$, където k и m са естествени числа. Получаваме уравнението $xy = 4k^2(k+m)^2$, което има решение $x = 9k^2$, $y = 16k^2$.

Втори начин. Както по-горе се вижда, че $x + y$ е точен квадрат, а тогава от повдигане в квадрат на $\sqrt{x} = n + \sqrt{x+y} - \sqrt{y}$ следва, че и y е точен квадрат. Аналогично заключаваме, че и x е точен квадрат. Тогава $\sqrt{x}$, $\sqrt{y}$ и $\sqrt{x+y}$ е питагорова тройка. Нека $\sqrt{x} = u^2 - v^2$, $\sqrt{y} = 2uv$ и $\sqrt{x+y} = u^2 + v^2$. От уравнението получаваме $u = v + \frac{n}{2v}$, откъдето се вижда, че нямаме решение при нечетно n. При четно n решение се получава за всяко v, за което $2v$ е делител на n.

Оценяване. (7 точки) 2 т. извода, че $x+y$ е точен квадрат, 2 т. за доказване, че уравнението няма решение при нечетно n, 3 т. за посочване на решение при четно n.

Задача 9.4. Дадено е естествено число n. Върху две успоредни прави са отбелязани общо n точки и са построени всички отсечки с краища в тези точки. Нека a_n е максималният брой области, на които може да се е разпаднала ивицата между двете прави (например $a_2 = 2$).

а) Пресметнете a_{10} и a_{41}.

б) Докажете, че съществува просто число p, което не дели никое a_n, и намерете най-малкото такова p.

Решение. Нека в конфигурацията с максимален брой области на едната права има x точки, а на другата $y = n - x$ и $x \geq y$. Явно в тази конфигурация никои три отсечки не минават през една точка. Отначало ивицата е една област. Ако при построяването на дадена отсечка тя пресече z предишни, то тя се разпада на $z+1$ отсечки, всяка от които дели някаква област, така че броят на областите нараства със $z+1$. Сумирайки по всички построени отсечки, заключаваме, че броят на областите е с 1 повече от сбора на броя отсечки (който е xy) и броя на пресечни точки на отсечки. Всяка пресечна точка се обуславя от двойка точки по едната права и двойка точки по другата, т.е. броят им е $\frac{1}{4}x(x-1)y(y-1)$. Получаваме, че $a_n = 1 + xy + \frac{1}{4}x(x-1)y(y-1)$.

Да допуснем, че $x - y \geq 2$. Да разгледаме конфигурация с $x-1$ точки на едната права и $y+1$ на другата. От максималността следва

$$xy + \frac{1}{4}x(x-1)y(y-1) \geq (x-1)(y+1) + \frac{1}{4}(x-1)(x-2)(y+1)y$$

$$0 \geq x - y - 1 + \frac{1}{4}(x-1)y(x-2y-2+x) \geq 2 - 1 + \frac{1}{4}(x-1)y(2.2-2) \geq 0,$$

което е противоречие. Така в максималната конфигурация броят на точките върху двете прави се различава най-много с 1. Следователно:
- ако $n = 2k$, то $x = y = k$ и $a_n = 1 + k^2 + \frac{1}{4}k^2(k-1)^2 = \frac{1}{4}(k^4 - 2k^3 + 5k^2 + 4)$.
- ако $n = 2k+1$, то $x = k+1$, $y = k$ и $a_n = 1 + (k+1)k + \frac{1}{4}k^2(k^2-1) = \frac{1}{4}(k^4 + 3k^2 + 4k + 4)$.

а) Имаме $a_{10} = \frac{1}{4}(5^4 - 2.5^3 + 5^3) + 1 = 126$ и $a_{41} = \frac{1}{4}(20^4 + 3.20^2) + 20 + 1 = 40321$.

б) Имаме $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $a_5 = 10$, $a_{10} = 126$, сред които има кратни на първите 4 прости числа. За да покажем, че $p = 11$ е търсеното число, разглеждаме остатъците при деление на 11 и се уверяваме, че числителите не се делят на 11, така че и a_n не се дели на 11:

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
k^2	0	1	4	9	5	3	3	5	9	4	1
k^3	0	1	8	5	9	4	7	2	6	3	10
k^4	0	1	5	4	3	9	9	3	4	5	1
$k^4 - 2k^3 + 5k^2 + 4$	4	1	1	8	6	3	9	3	10	2	8
$k^4 + 3k^2 + 4k + 4$	4	1	7	3	5	9	2	6	1	2	4

Оценяване. (7 точки) 1 т. за $a_n = 1 + xy + \frac{1}{4}x(x-1)y(y-1)$; 1 т. за доказване, че броят на точките по двете линии се различава с 0 или 1; 1 т. за извеждане на формулите за a_k и a_{k+1}; 1 т. за $a_{10} = 126$; 1 т. за $a_{41} = 40321$; 1 т. за доказване, че $p > 7$; 1 т. за доказване, че $p = 11$.

Задача 10.1. Да се реши уравнението

$$\frac{3x}{\sqrt{2 - |1 - 2x|}} = 1.$$

Решение. Първо забелязваме, че ако даденото уравнение има решение, то е положително число, т.е. $x > 0$. Така след привеждане под общ знаменател и повдигане на квадрат достигаме до еквивалентното уравнение.

$$9x^2 = 2 - |1-2x|, \text{ където } x > 0.$$

Случай 1. Ако $1 - 2x \geqq 0$, т.е. $x \leqq \dfrac{1}{2}$, то получаваме $9x^2 - 2x - 1 = 0$ с корени $x_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{10}}{9}$, но само $\dfrac{1+\sqrt{10}}{9}$ е в интервала $\left(0, \dfrac{1}{2}\right]$.

Случай 2. Ако $1 - 2x < 0$, т.е. $x > \dfrac{1}{2}$, то получаваме $9x^2 + 2x - 3 = 0$ с корени $x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm 2\sqrt{7}}{9}$, но нито един от тях не е в интервала $\left(\dfrac{1}{2}, +\infty\right]$.

Така окончателно получаваме, че задачата има единствено решение $x = \dfrac{1+\sqrt{10}}{9}$.

Оценяване. (6 точки) 2 т. за $x > 0$ и свеждането до еквивалентно уравнение без радикал; 2 т. за случай 1.; 2 т. за случай 2.

Задача 10.2. Да се определят стойностите на параметъра a, за които уравнението

$$x^3 - ax^2 + (a-1)^2 = 0,$$

има най-много едно положително решение.

Решение. Забелязваме, че $x = a - 1$ е корен на уравнението и го записваме във вида

$$(x - a + 1)(x^2 - x - a + 1) = 0.$$

Нека $f(x) = x^2 - x - a + 1$ и $D = 1 - 4(-a+1) = 4a - 3$.

Случай 1. Ако $D \leqq 0$, т.е. $a \in \left(-\infty, \dfrac{3}{4}\right]$, то $f(x) = 0$ има най-много едно решение $x = \dfrac{1}{2}$ и даденото уравнение има едно отрицателно решение $x = a - 1$ и едно положително решение $x = \dfrac{1}{2}$ при $a = \dfrac{3}{4}$.

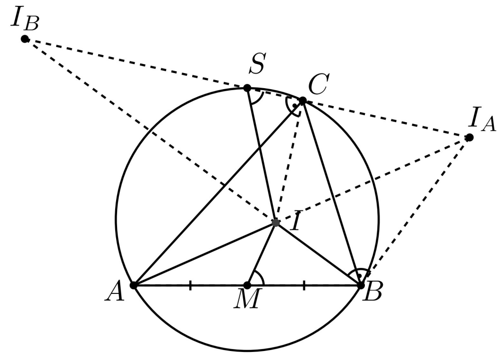
Случай 2. Ако $D > 0$, тъй като $\dfrac{1}{2} > 0$, то $f(x) = 0$ има поне едно положително решение и за да е единствено е необходимо $f(0) = -a + 1 \leqq 0$. В същото време, $x = a - 1 \geqq 0$ е решение на уравнението, което ако е положително е необходимо да съвпада с положителното решение на $f(x) = 0$. Така достигаме до извода, че $a = 1$ или $f(a-1) = 0$, т.е. $a = 1$ или $a = 3$, когато получаваме съответните решения $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ и $x_1 = -1$, $x_2 = 2$.

Окончателно $a \in \left(-\infty, \dfrac{3}{4}\right] \cup \{1\} \cup \{3\}$.

Оценяване. (6 точки) 2 т. за разлагането $(x + a + 1)(x^2 - x + a + 1) = 0$; 2 т. за случай 1.; 2 т. за случай 2.

Задача 10.3. Даден е $\triangle ABC$, който е вписан в окръжност k. Нека I е центъра на вписаната в $\triangle ABC$ окръжност, M е средата на страната AB, а S е средата на дъгата $\overset{\frown}{ACB}$. Да се намери $\sphericalangle ACB$, ако $IS = 2IM$.

Решение. Ще използваме стандартните означения за ъглите в триъгълник. Тъй като S е среда на $\widehat{ACB}$, то $\sphericalangle ICS = \sphericalangle ICA + \sphericalangle ACS = \frac{\gamma}{2} + \left(90^\circ - \frac{\gamma}{2}\right) = 90^\circ$ и следователно правата CS е външна ъглополовяща за $\sphericalangle ACB$. Тогава пресечните точки I_A и I_B на правите AI и BI с правата CS са центровете на външновписаните окръжности за $\triangle ABC$ към страните BC и AC съответно.
От $\sphericalangle I_AI_BI = \frac{\alpha}{2} = \sphericalangle IAB$ и $\sphericalangle I_BI_AI = \frac{\beta}{2} = \sphericalangle IBA$ следва, че $\triangle II_BI_A \sim \triangle IAB$. Освен това $\sphericalangle BSC = \alpha = 2\sphericalangle SI_BB$, т.е. S е среда на хипотенузата в правоъгълния триъгълник I_AI_BB.



Следователно IS и IM са съответни медиани в подобни триъгълници. Но по условие $IS = 2IM$, т.е. $II_A = 2IB$, откъдето получаваме $\sphericalangle II_AB = \frac{\gamma}{2} = 30^\circ$ и следователно $\sphericalangle ACB = 60^\circ$.

Оценяване. (7 точки) 1 т. за доказателство, че CS е външна ъглополовяща; 1 т. за построяване на точките I_A и I_B; 1 т. за $\triangle II_BI_A \sim \triangle IAB$; 1 т. за S - среда на I_AI_B; 3 т. за $\sphericalangle ACB = 60^\circ$.

Задача 10.4. Дадени са естествените числа a и b. На черната дъска се записват четирите числа

$$X = a, Y = b, U = a, V = b.$$

Докато е възможно, с тези числа извършваме следното преобразувание:

- ако $X > Y$, X и U се изтриват и на тяхно място се записват съответно $X - Y$ и $U + V$;
- ако $X < Y$, Y и V се изтриват и на тяхно място се записват съответно $Y - X$ и $U + V$;

След всяко преобразувание четирите числа отново се означават с X, Y, U и V в посочения ред. Процесът спира, ако $X = Y$. Да се докаже, че процесът спира при всеки първоначален избор на числата a и b и да се намери $U + V$ в крайния момент.

Решение. Очевидно $X+Y$ намалява строго и $X+Y > 0$, следователно процесът ще спре след краен брой стъпки. Най-големият общ делител на X и Y е инварианта (защо?) и следователно процесът ще спре при $X = Y = (a, b)$. От друга страна, $XV + YU = 2ab$ също е инварианта (защо?), откъдето получаваме, че в крайния момент имаме

$$2ab = XV + YU = (a, b)(U + V),$$

но $ab = (a, b)[a, b]$ и следователно $U + V = 2[a, b]$.

Оценяване. 1 т. за аргументация, че процесът е краен; 1 т. за намиране на инварианта (X, Y); 3 т. за намиране на инварианта $XV + YU$; 2 т. за довършване на решението.

Задача 11.1. Дадена е аритметична прогресия с 2025 члена, първи член $a_1 = 1$ и разлика $d \neq 0$. Известно е, че съществува естествено число n, $1 < n < 2025$, за което a_1, a_n и a_{2025} в този ред образуват геометрична прогресия с частно $q = d + n - 1$. Колко различни стойности може да приема разликата d?

Решение. От $a_n = qa_1$ намираме $1 + (n-1)d = d + n - 1$, откъдето $(n-2)(d-1) = 0$. При $d = 1$ имаме $a_{2025} = 2025$, $q = n$ и от $a_{2025} = q^2.a_1 = n^2$ намираме $n^2 = 2025$, т.е. $n = 45$. При $n = 2$ имаме $q = d + 1$ и от $a_{2025} = q^2.a_1 = q^2$ получаваме $(1+d)^2 = 1 + 2024d$, откъдето $d = 2022$. Следователно d може да приема две стойности.

Оценяване. (6 точки) 2 т. за намиране $n = 2$ или $d = 1$; 2 т. за случая $n = 2$; 2 т. за случая $d = 1$.

Задача 11.2. Да се намерят всички естествени числа n, за които числото $n+1$ има само един прост делител и $(n-1)! + n! + (n+1)!$ не дели $(n!)^2$. (За естествено число m с $m!$ означаваме числото $1.2.3.\ldots.m$)

Решение. Имаме $(n-1)!+n!+(n+1)! = (n-1)!(n+1)^2$ и ако това число дели $(n!)^2$, то $(n+1)^2$ дели $(n!).n$. Понеже $n+1$ и n са взаимнопрости, то $(n+1)^2$ дели $(n-1)!$. Нека $n+1 = p^\alpha$. Ако $\alpha = 1$, то p не дели $(p-2)!$ и следователно всички числа от вида $n = p - 1$ са измежду търсените. Нека $\alpha \geq 2$. Тогава числата $p, 2p, \ldots, (p^{\alpha-1} - 1)p$ са по-малки от $p - 1$ и се делят на p. Оттук следва, че степента на p, която дели $(p-1)!$ е поне $p^{\alpha-1} - 1$. Ако $2\alpha \leq p^{\alpha-1} - 1$, то p^α ще дели $(p-2)!$, откъдето получаваме $2\alpha > p^{\alpha-1} - 1$. Ако $p \geq 5$, то $2\alpha > 5^{\alpha-1} - 1$, което не е вярно (доказва се по индукция) за никое $\alpha \geq 2$. Ако $p = 3$ неравенството $2\alpha > 3^{\alpha-1} - 1$ е изпълнено само за $\alpha = 2$, а при $p = 2$ неравенството $2\alpha > 2^{\alpha-1} - 1$ е изпълнено само при $\alpha = 2, 3, 4$. Директна проверка за $p^\alpha = 9, 4, 8, 16$ показва, че при $\alpha \geq 2$ търсените стойности за p^α са $4, 8$ и 9.

Следователно естествените числа n, които удовлетворяват условието, са числата от вида $p - 1$, където p е просто число и $3, 7, 8$.

Оценяване. (6 точки) 1 т. за наблюдението, че $p - 1$ за p просто число е решение; 1 т. за наблюдението, че $(n+1)^2$ дели $(n-1)!$; 1 т. за неравенството $2\alpha > p^{\alpha-1} - 1$; по 1 т. за всеки от случаите $p = 2, 3$ и $p \geq 5$.

Задача 11.3. В остроъгълен триъгълник ABC е построена окръжност Ω, която минава през точка A и е с център върху височината AH, $H \in BC$. Пресечните точки на Ω с отсечките AB и AC са означени с P и Q, като $AP^2 = AQ.CQ$. Точка K от описаната около триъгълник OBC окръжност, където точка O е центърът на описаната около $\triangle ABC$ окръжност, лежи в една и съща полуравнина с точка A спрямо правата BC и $\sphericalangle BKA = \sphericalangle CKA$. Да се докаже, че точката K лежи на Ω.

Решение. Ако S е центърът на Ω, то $\sphericalangle SAB = 90^\circ - \beta$, откъдето $\sphericalangle AQP = \beta$. Следователно $\triangle ABC \sim \triangle AQP$ и $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AQ}{AP}$. От $AP^2 = CQ.AQ$ намираме $\dfrac{AQ}{AP} = \dfrac{AP}{CQ}$, откъдето

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AP}{CQ}. \tag{1}$$

Понеже $\sphericalangle BKC = \sphericalangle BOC = 2\alpha$, то $\sphericalangle AKB = \sphericalangle AKC = 180^\circ - \alpha$. Тогава $\sphericalangle BAK + \sphericalangle ABK = \alpha$, откъдето $\sphericalangle ABK = \sphericalangle CAK$. Следователно $\triangle ABK \sim \triangle CAK$ и получаваме $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AK}{CK}$. От това равенство, заедно с (1) намираме $\dfrac{AP}{CQ} = \dfrac{AK}{CK}$, което означава, че $\triangle APK \sim \triangle CQK$. Оттук $\sphericalangle APK = \sphericalangle CQK$, т.е. точките A, P, K, Q лежат на една окръжност.

Оценяване. (7 точки) 2 т. за $\triangle ABC \sim \triangle AQP$; 2 т. за $\triangle ABK \sim \triangle CAK$; 2 т. за $\triangle APK \sim \triangle CQK$; 1 т. за довършване на решението.

Задача 11.4. Една редица $\mathbf{x} = x_1, x_2, \dots, x_{2015}$ от нули и единици се нарича *добра*, ако съществува единствена редица $\mathbf{y} = y_1, y_2, \dots, y_{2015}$ от нули и единици, различна от $\mathbf{x}$, със следното свойство: всяка редица, получена от $\mathbf{x}$ след изтриване на един неин член може да се получи с изтриване на един член на редицата $\mathbf{y}$. Да се намери броят на добрите редици.

Решение. Ако редицата $\mathbf{x}$ е съставена само от нули (съответно единици), то всяка редица $\mathbf{y}$, съдържаща само една единица (съответно нула) има исканото в условието свойство. Следователно такава редица не е добра. Да забележим, че ако броят на символите 0 в редицата $\mathbf{x}$ е по-малък от броя на символите 0 в редицата $\mathbf{y}$, то изтриването на една нула в $\mathbf{x}$ ще доведе до редица, в която нулите са поне две по-малко от нулите в $\mathbf{y}$ и такава редица не може да се получи с едно изтриване в $\mathbf{y}$. Следователно в $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ има равен брой нули и единици.

Да допуснем, че $x_1 \neq y_1$ и нека за определеност $x_1 = 0$, $y_1 = 1$. Редицата, получена от $\mathbf{x}$ след изтриване на произволен символ x_i за $i \geq 2$ започва с 0 и следователно може да се получи от $\mathbf{y}$ само с изтриване на $y_1 = 1$, като тогава трябва да имаме $y_2 = 0$. Това означава, че произволно изтриване на x_i за $i \geq 2$ в редицата $x_2, x_3, \dots, x_{2015}$ води до получаване на редицата $y_3, \dots, y_{2015}$. При изтриване на x_i за $i = 2, 3, \dots 2014$ имаме $x_{i+1} = y_{i+1}$, а при изтриване на x_{i+1} имаме $x_i = y_{i+1}$. Следователно $x_i = x_{i+1}$, откъдето получаваме $x_2 = x_3 = x_4 = \cdots = x_{2015}$. Ако $x_2 = 0$, то всички членове на $\mathbf{x}$ са нули и тогава всяка редица само с една единица може да се избере за $\mathbf{y}$. Следователно $x_2 = 1$, $\mathbf{x} = 0, 1, 1, \dots, 1$ и $\mathbf{y} = 1, 0, 1, 1, \dots, 1$.

Нека сега $x_1 = y_1$ и за определеност нека $x_1 = y_1 = 0$. Тогава за някое k, за което $1 \leq k \leq 2014$ имаме $x_1 = \cdots = x_k \neq x_{k+1} = 1$ и да допуснем, че $0 = y_1 = \cdots = y_{k+1}$. Изтриване на x_1 води до редица, която започва с $k-1$ символа 0, а всяко изтриване на символ от $\mathbf{y}$ води до редица, която започва с поне k символа 0, противоречие. Ако $0 = y_1 = \cdots = y_k \neq y_{k+1}$, то изтриване на x_1 води до изтриване на някое y_i за $i = 1, 2, \dots, k$ и двете редици ще съвпадат, противоречие. Следователно $0 = y_1 = \cdots = y_t \neq y_{t+1} = 1$ за някое $t < k$. Всяко изтриване на x_i за $i \geq k+1$ води до изтриване на y_{t+1} и до $y_{t+1} = 0$. Както по-горе следва, че $x_{k+1} = \cdots = x_{2015} = y_{k+2} = \cdots = y_{2015}$. Понеже редицата $\mathbf{x}$ не е съставена само от нули и в $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ има равен брой нули и единици, то $\mathbf{x} = 0, 0, \dots, x_k = 0, x_{k+1} = 1, 1, 1, \dots, 1$ и $\mathbf{y} = 0, 0, \dots, y_t = 0, y_{t+1} = 1, 0, 0, \dots, y_{k+2} = 1, 1, \dots, 1$.

Ако $k > t+1$ изтриване на $x_1 = 0$ води до изтриване на символ нула от редицата $\mathbf{y}$. Понеже $k > t+1$ след $y_{t+1} = 1$ ще има поне една нула, противоречие. Следователно $k = t+1$ и $\mathbf{x} = 0, 0, \dots, x_k = 0, x_{k+1} = 1, 1, 1, \dots, 1$ и $\mathbf{y} = 0, 0, \dots, y_t = 0, y_k = 1, 0, y_{k+2} = 1, 1, \dots, 1$.

Получихме, че всяка от търсените редици има вида $\mathbf{x} = 0, 0, \dots, 0, 1, 1, 1, \dots, 1$ или $\mathbf{x} = 1, 1, \dots, 1, 0, 0, 0, \dots, 0$. Следователно добрите редици са $2.2014 = 4028$.

Оценяване. (7 точки) 1 т. за случая, когато $\mathbf{x}$ се състои само от нули или единици; 1 т. за наблюдението, че $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ имат равен брой нули и единици; 1 т. за верен отговор без доказателство; 2 т. за случая $x_1 \neq y_1$; 2 т. за случая $x_1 = y_1$.

Задача 12.1. Нека $a_0, a_1, \ldots$ е такава редица от реални числа, че $a_n - a_{n-1} \geq 1$ и $a_{n+1} = n + \dfrac{1}{a_n - a_{n-1}}$ при $n \geq 1$. Да се докаже, че редицата с общ член $a_n - n$ е сходяща и да се намери нейната граница.

Решение. За $b_n = a_n - a_{n-1}$ $(n \geq 1)$ имаме, че

$$1 \leq b_{n+2} = 1 + \frac{1}{b_{n+1}} - \frac{1}{b_n}.$$

Следователно $b_n \geq b_{n+1} \geq 1$ и значи $l = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ съществува. Тогава $l = 1 + \dfrac{1}{l} - \dfrac{1}{l}$, т.е. $l = 1$, което е еквивалентно на $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - n) = 0$.

Оценяване. (6 точки) 3 т. за $b_n \geq b_{n+1}$ и 3 т. за довършване на решението.

Задача 12.2. Нека m_c и l_c са дължините на медианата и ъглополовящата през върха C на $\triangle ABC$ с лице S. Ако $\gamma = \angle BCA$, да се докаже, че

$$m_c l_c \geq S \cot\frac{\gamma}{2}.$$

Решение. Имаме, че

$$m_c^2 = \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4}, \quad l_c^2 = \frac{ab}{(a+b)^2}((a+b)^2 - c^2),$$

$$S\cot\frac{\gamma}{2} = \frac{(a+b)^2 - c^2}{4}.$$

Тогава

$$m_c^2 l_c^2 - S^2\cot^2\frac{\gamma}{2} = \frac{(a+b)^2 - c^2}{16(a+b)^2}(4ab((a+b)^2 + (a-b)^2 - c^2) - (a+b)^2((a+b)^2 - c^2))$$

$$= \frac{(a+b)^2 - c^2}{16(a+b)^2}(a-b)^2(c^2 - (a-b)^2) = \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2 S^2 \geq 0$$

Забележка. $\sqrt{S\cot\frac{\gamma}{2}}$ е дължината на чевианата през върха C, която разделя $\triangle ABC$ на два триъгълника с равни радиуси на вписаните окръжности.

Оценяване. (6 точки) 3 т. за свеждане до неравенство за a, b, c и 3 т. за довършване на решението.

Задача 12.3. Да се намерят всички двойки функции $f, g : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{N}_0$, където $\mathbb{N}_0$ е множеството на всички неотрицателни цели числа и:

(1) $f(1) > f(0)$;

(2) $f(g(n))$ е точно броят на целите неотрицателни числа $k \leq n$, за които $f(k) \leq k$ и $g(f(n))$ е точно броят на целите неотрицателни числа $k \leq n$, за които $g(k) > k$.

Решение. *Отговор:* $f(n) = n, g(n) = n + 1$ са единствената двойка функции, решение на задачата. Лесна проверка показва, че те удовлетворяват поставените условия. Имаме, че $f(g(0)) \leq 1$ и $g(f(0)) \leq 1$. Ще разгледаме 4 случая:

Случай 1: $f(g(0)) = g(f(0)) = 0$

Тогава $g(0) = 0$ и $f(0) > 0$ от (2). Но $0 = f(g(0)) = f(0)$, противоречие.

Случай 2: $f(g(0)) = g(f(0)) = 1$

Тогава $g(0) > 0$ и $f(0) = 0$ от (2). Но тогава $1 = g(f(0)) = g(0)$. С индукция по n ще докажем, че за всяко цяло неотрицателно число $f(n) = n$ и $g(n) = n+1$. Базата е доказана. Нека n е цяло неотрицателно число, за което твърдението е вярно. Тогава $f(g(n)) = f(n+1)$ е броят на числата по-малки или равни на n, за които $f(k) \leq k$, тоест $n+1$. Тогава $g(f(n+1)) = g(n+1)$ е броят на числата, по-малки или равни на $n+1$, за които $g(k) > k$, като има поне $n+1$ такива числа. Тогава $n+1 \leq g(n+1) \leq n+2$. Тогава ако $g(n+1) = n+1$ имаме, че $f(g(n+1)) = n+1$, а всички цели неотрицателни числа по-малки или равни на $n+1$ удовлетворяват $f(k) \leq k$, противоречие. Следователнно $g(n+1) = n+2$. Индукцията е завършена.

Случай 3: $f(g(0)) = 1, g(f(0)) = 0$

Тогава $g(0) = 0$ и $f(0) = 0$ от (2). Но $0 = f(g(0)) = f(0) = 0$, противоречие.

Случай 4: $f(g(0)) = 0, g(f(0)) = 1$

Тогава $g(0) > 0$ и $f(0) > 0$ от (2). Но $0 = f(g(0)) = f(0) = 0$. Имаме, че $f(g(f(0))) = f(1)$ е всъщност броят на числата, по-малки или равни на $f(0)$ такива, че $f(k) \leq k$, като 0 не е сред тях. Тогава $f(1) \leq f(0)$, противоречие с (1).

Оценяване. (7 точки) 1 т. за случай 1; 3 т. за случай 2; 1 т. за случай 3; 2 т. за случай 4.

Задача 12.4. Нека X, Y и Z са три различни точки от вътрешността на изпъкнал многоъгълник Π. Да се докаже, че $f(X,Y)f(Y,Z) \geq f(X,Z)$, където

$$f(X,Y) = \frac{r(X) + r(Y) + |XY|}{2\sqrt{r(X)r(Y)}},$$

а $r(X)$ е радиусът на най-големия кръг в Π с център X.

Решение. Имаме, че $f(X,Y)f(Y,Z) \geq f(X,Z) \Leftrightarrow$

$$(r(X) + r(Y) + |XY|)(r(Y) + r(Z) + |YZ|) \geq 2r(Y)(r(X) + r(Z) + |XZ|) \Leftrightarrow$$

$$(r(X) - r(Y) + |XY|)(r(Z) - r(Y) + |ZY|) + 2r(Y)(|XY| + |YZ| - |XZ|) \geq 0.$$

За всяка точка P от контура на Π е в сила $r(Y) \leq |YP| \leq |XP| + |XY|$. Можем да изберем P така, че $|XP| = r(X)$ и тогава $r(Y) \leq r(X) + |XY|$. Аналогично $r(Y) \leq r(Z) + |ZY|$ и понеже $|XZ| \leq |XY| + |YZ|$, следва, че $f(X,Y)f(Y,Z) \geq f(X,Z)$.

Оценяване. (7 точки) 2 т. за $r(Y) - r(X) \leq |XY|$ и 5 т. за довършване на решението.

Задачите са предложени от: 8.1-8.4 – Иван Тонов, 9.1, 9.3 – Петър Бойваленков; 9.2, 9.4. – Ивайло Кортезов; 10.1 – Иван Ланджев; 10.2 – Стоян Боев; 10.3 – Стоян Боев; 10.4 – Иван Ланджев; 11.1 – Пламен Пенчев и Емил Колев; 11.2 – Емил Колев; 11.3 – Пламен Пенчев; 11.4 – Емил Колев; 12.1, 12.2, 12.4 – Николай Николов; 12.3 – Любен Личев.