## Условия, кратки решения и критерии за оценяване

**Задача 8.1.** Нека $a$, $b$ и $c$ са естествени числа, такива че

$$a^2 + b^2 + c^2 = (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2.$$

а) Възможно ли е да е изпълнено равенството $a + b + c = 2017$?
б) Да се докаже, че числата $ab + bc + ca$ и $ab$ са точни квадрати на цели числа.

*Решение.* а) От условието получаваме $a^2+b^2+c^2 = 2(ab+bc+ca)$, което показва, че $a+b+c$, имайки същата четност като $a^2 + b^2 + c^2$, трябва да е четно число, т.е. не може да е 2017.
б) Директно се проверява, че полученото в а) равенство може да се запише във вида

$$ab + bc + ca = \left(\frac{a+b+c}{2}\right)^2 \text{ или } ab = \left(\frac{a+b-c}{2}\right)^2.$$

От тези равенства следва, че числата $ab + bc + ca$ и $ab$ са точни квадрати на цели числа.

**Оценяване.** (6 точки) 2 т. - за а); 2 т. за това, че $ab+bc+ca$ е точен квадрат и 2 т. за това, че $ab$ е точен квадрат.

**Задача 8.2.** Даден е равнобедрен триъгълник $ABC$, $AC = BC$, и точките $H$ и $M$ от правата $AC$, такива че $BH$ и $BM$ са съответно височина и медиана в триъгълника $ABC$. Да се намерят мерките на ъглите на триъгълника $ABC$, ако $MH = \frac{1}{2}AB$.

*Решение.* Нека $ABC$ е остроъгълен триъгълник. Тогава точката $H$ е между $A$ и $M$, защото в противен случай $AB > BC = AC$ и не е възможно част от половината на $AC$ да е равна на половината на $AB$. Нека точка $K$ е среда на $AB$. Тогава $HK = AK = BK = \frac{1}{2}AB$ като медиана в правоъгълен триъгълник. От друга страна $MK$ е средна отсечка и понеже $MH = HK$, триъгълникът $KMH$ е равнобедрен с $\sphericalangle HKM = \sphericalangle AMK = \sphericalangle ACB$. Следователно $\sphericalangle CAB = \sphericalangle AHK = 2\sphericalangle ACB$ (като външен), т.е. $\alpha = 2\gamma$ и от $\alpha+\beta+\gamma = 180^\circ$ следва, че $\alpha = \beta = 72^\circ$ и $\gamma = 36^\circ$.
Ако триъгълникът $ABC$ е тъпоъгълен, действаме аналогично като получаваме $\gamma = 3\alpha$, откъдето $\alpha = \beta = 36^\circ$ и $\gamma = 108^\circ$.

**Оценяване.** (6 точки) 4 т. за намиране на решението само в един от двата случая (остроъгълен или тъпоъгълен); 1 т. за въвеждане на средата на $AB$.

**Задача 8.3.** На дъската са записани в редица естествените числа от 1 до 2016. Разрешава се изтриване на число от произволна двойка съседни числа по следното правило: ако сборът на числата от двойката е нечетен изтриваме лявото число, а ако е четен – дясното. След 2015 такива изтривани на дъската остава едно число. Да се намерят всички възможни стойности на това число.

*Решение.* Ще разгледаме следната помощна задача. В редица са поставени алтернативно бели и черни топчета, като започнем с бяло, след това черно, бяло и т.н. Разрешава се от всяка двойка съседни топчета да се махне едно по правилото – ако топчетата са разноцветни махаме лявото, а ако са едноцветни – дясното. Какъв е цветът на последното останало

топче? Ще покажем, че цветът на последното топче не се изменя. Наистина, ако се извършва премахване, което не засяга последното топче, всичко е ясно. Ако извършваме действие с последните две топчета и те са разноцветни, махаме лявото, т.е. цветът на последното се запазва. Ако последните топчета са едноцветни без значение цветът на последното няма да се промени.
Да се върнем към задачата. Наричаме нечетните числа бели, а четните - черни. Тъй като 2016 е четно число, то ще е черно, което показва, че последното останало неизтрито число е четно. Ще покажем как може да достигнем с помощта на дадените операции до произволно четно число. Просто извършваме операциите с първите две числа и значи се изтрива числото 1. Продължаваме по същия начин докато достигнем до избраното число. След това действаме отзад напред като за два хода изтриваме последните две числа. Тъй като броят на числата, по-големи от избраното, е четен, ще достигнем и точно до избраното.

**Оценяване.** (7 точки) 4 т. за доказване, че последното число е четно; 3 т. за даване на пример, че последното число може да е всяко четно число.

**Задача 8.4.** Сборът $\dfrac{2^1}{1}+\dfrac{2^2}{2}+\dfrac{2^3}{3}+\cdots+\dfrac{2^{2016}}{2016}$ е записан като несъкратима дроб $\dfrac{p}{q}$.
а) Да се докаже, че $p$ се дели на 32.
б) Да се докаже или опровергае, че $p$ се дели на 64.

*Решение.* Ще докажем нещо повече, че $p$ се дели на 512. Да означим $a_n=\dfrac{2^1}{1}+\dfrac{2^2}{2}+\dfrac{2^3}{3}+\cdots+\dfrac{2^n}{n}$. Имаме последователно

$$a_1=2, a_2=4, a_3=\frac{20}{3}, a_4=\frac{32}{3}, a_5=\frac{256}{15}, a_6=\frac{32.13}{153}, a_7=\frac{32.151}{105}, a_8=\frac{2^{13}}{105}.$$

За да пресметнем $a_{13}$ последователно прибавяме дробите $\dfrac{2^9}{9},\dfrac{2^9}{5},\dfrac{2^{11}}{11},\dfrac{2^{10}}{3},\dfrac{2^{13}}{13}$. Числителите на всяка от тези дроби се дели на 512 и следователно числителят на $a_{13}$ също ще се дели на 512. Като използваме неравенството $2^{n-9}>n$ за $n>13$, което от своя страна лесно следва по индукция, виждаме че числителите на всяко от следващите събираеми ще се делят поне на 512. Следователно и числото $p$ ще се дели на 512.

**Оценяване.** (7 точки) 3 т. - за а); 4 т. за б); най-много 2 т. за пресмятане на първите няколко члена на редицата.

**Задача 9.1.** Квадратното уравнение $x^2-bx+c=0$ има два различни корена, които са естествени числа. Известно е, че $2b+c=2016$. Да се намерят корените на уравнението и коефициентите $b$ и $c$.

*Решение.* От формулите на Виет имаме $x_1+x_2=b$ и $x_1x_2=c$. Тогава

$$2016=2b+c=2x_1+2x_2+x_1x_2=(2+x_1)(2+x_2)-4,$$

т.е. $(2+x_1)(2+x_2) = 2020$. Тъй като разлагането на 2020 на прости множители е $2020 = 2^2.5.101$, от условието и наредбата $x_1 < x_2$ (очевидно $x_1 = x_2$ е невъзможно) следват четири възможности:
– ако $2+x_1 = 4$ и $2+x_2 = 505$, то $x_1 = 2$, $x_2 = 503$, $b = 505$ и $c = 1006$;
– ако $2+x_1 = 5$ и $2+x_2 = 404$, то $x_1 = 3$, $x_2 = 402$, $b = 405$ и $c = 1206$;
– ако $2+x_1 = 10$ и $2+x_2 = 202$, то $x_1 = 8$, $x_2 = 200$, $b = 208$ и $c = 1600$;
– ако $2+x_1 = 20$ и $2+x_2 = 101$, то $x_1 = 18$, $x_2 = 99$, $b = 117$ и $c = 1782$.
За пълно описание на отговорите трябва да се отчете и наредбата на $x_1$ и $x_2$.

**Оценяване.** (6 точки) 1 т. за разлагането $(2+x_1)(2+x_2) = 2020$, 1 т. за разбиването на 4 случая, по 1 т. за всеки от случаите.

**Задача 9.2.** Точка $P$ е вътрешна за страната $AB$ на остроъгълен $\triangle ABC$. Около триъгълниците $APC$ и $BPC$ са описани съответно окръжности $k_1$ и $k_2$, като $k_1$ пресича $BC$ за втори път в точка $M$, а $k_2$ пресича $AC$ за втори път в точка $N$. Допирателната към $k_1$ в точка $P$ пресича $k_2$ за втори път в точка $S$, а допирателната към $k_2$ в точка P пресича $k_1$ за втори път в точка $T$. Известно е, че правите $AT$, $BS$ и $CP$ се пресичат в една точка. Да се докаже, че точките $S$, $M$, $N$ и $T$ лежат на една права.

*Решение.* Ще използваме стандартните означения за ъглита на $\triangle ABC$. Нека $AT$, $BS$ и $CP$ се пресичат в точка $Q$. От вписани ъгли следва, че $\sphericalangle CPS = \sphericalangle CBS = \alpha$ и $\sphericalangle CPT = \sphericalangle CAT = \beta$. Тогава $\sphericalangle BAQ = \sphericalangle ABQ = \gamma$ и значи $\sphericalangle AQB = 180^\circ - 2\gamma$.

Тъй като $\frac{\widehat{PBS}}{2} = \sphericalangle PCS = \sphericalangle ABQ = \gamma$ и аналогично $\sphericalangle PCT = \gamma$, имаме $\sphericalangle TCP = 2\gamma$ и значи четириъгълникът $TQSC$ е вписан, откъдето $\sphericalangle QST = \sphericalangle QTS = \gamma$. Освен това $\sphericalangle NSB = \sphericalangle NCB = \gamma$ от окръжността $k_2$ и следователно $N$ лежи на $ST$. Аналогично се вижда, че и $M$ лежи на $ST$.

**Оценяване.** (6 точки) 1 т. за $\sphericalangle CPS = \sphericalangle CBS = \alpha$ и $\sphericalangle CPT = \sphericalangle CAT = \beta$; 1 т. за $\sphericalangle BAQ = \sphericalangle ABQ = \gamma$; 2 т. за доказване, че $TQSC$ е вписан; 1 т. за $\sphericalangle QST = \sphericalangle QTS = \gamma$ и 1 т. за $\sphericalangle NSB = \sphericalangle NCB = \gamma$ и финализиране.

**Задача 9.3.** Дадени са естествени числа $n$ и $k$. На коледна гирлянда има $n$ разноцветни лампички, поставени през 1 дм. Нека $s(n,k)$ е броят начини от тях да се светнат точно $k$, така че най-малкото разстояние между две светещи лампички да е равно на 2 дм.
а) Докажете, че $s(n,3)$ е точен квадрат.
б) Докажете, че $s(28,5)$ е точна трета степен.

*Решение.* Всяко разположение, при което най-малкото разстояние е поне 2 дм, може да се кодира с редица от $k$ букви Л (= светни тази лампичка и отиди 2 дм по-нататък; за целта добавяме още 2 лампички-фантоми в края на гирляндата) и $n+1-2k$ букви С (= премини 1 дм по-нататък). Общият брой на тези кодове е $\dfrac{(n+1-k)!}{(n+1-2k)!k!}$.

Всяко разположение, при което най-малкото разстояние е поне 3 дм, може да се кодира с редица от $k$ букви Л (= светни тази лампичка и отиди 3 дм по-нататък; за целта добавяме още 3 лампички-фантоми в края на гирляндата) и $n+2-3k$ букви С (= премини 1 дм по-нататък). Общият брой на тези кодове е $\dfrac{(n+2-2k)!}{(n+2-3k)!k!}$.

Тогава $s(n,k)$ е разликата между намерените две количества:

$$\frac{(n+1-k)!}{(n+1-2k)!k!}-\frac{(n+2-2k)!}{(n+2-3k)!k!}.$$

а) Имаме $s(n,3)=\dfrac{(n-2)(n-3)(n-4)}{3!}-\dfrac{(n-4)(n-5)(n-6)}{3!}=$

$$=\frac{(n-4)(n^2-5n+6-n^2+11n-30)}{6}=\frac{(n-4)(6n-24)}{6}=(n-4)^2.$$

б) Имаме $s(28,5)=\dfrac{24.23.22.21.20}{5!}-\dfrac{20.19.18.17.16}{5!}=4.23.22.21-19.3.17.16=$

$$=8(23.11.21-19.3.17.2)=8.3375=2^3.3^3.5^3$$

**Оценяване.** (7 точки) По 1 т. за коректно кодиране на случаите с разстояние поне 2 дм и поне 3 дм; 1 т. за изразяване на $s(n,k)$; по 2 т. за завършване на всеки от случаите а) и б).

**Задача 9.4.** Да се докаже, че за всяко естествено число $n\geq 2$ съществува естествено число $k$, такова, че $2k+1$ дели $k!\pm n$ при подходящ избор на знака.

*Решение.* Нека $p$ е нечетен прост делител на $n^2+1$ (тъй като $n^2+1>4$ не се дели на 4, такъв съществува). Тогава $p\equiv 1 \pmod 4$ и числото $\frac{p-1}{2}$ е четно. Следователно

$$(k!)^2=\left(\left(\frac{p-1}{2}\right)!\right)^2=(-1)^{(p-1)/2}\left(\left(\frac{p-1}{2}\right)!\right)^2\equiv(p-1)!\equiv -1 \pmod p$$

(използвахме сравненията $i\equiv -(p-i) \pmod p$ и теоремата на Уилсън). Получихме $n^2\equiv (k!)^2 \pmod p$, откъдето $p|(k!-n)(k!+n)$ и твърдението на задачата следва.

**Оценяване.** (7 точки) 2 т. за избор на $k$, който решава задачата, 5 точки за доказателство, че изборът работи; най-много 3 т. общо за частни случаи като $k=1$, $2k+1=pq$, където $p$ и $q$ са различни нечетни прости числа и т.н.

**Задача 10.1.** Да се намерят стойностите на параметъра $a$, за които уравнението

$$ax^2+|x-1|=0$$

има поне две положителни решения.

*Решение.* Очевидно при $a>0$ уравнението няма решение. При $a=0$ решението е едно, $x=1$. Така остава да разгледаме случая, когато $a<0$. Записваме уравнението във вида

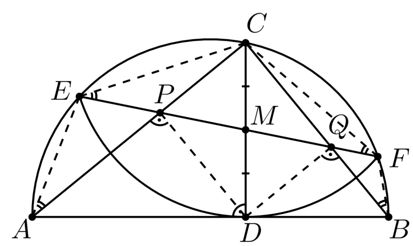
$$|x-1|=-ax^2$$

откъдето следва, че $x-1=\pm ax^2$, т.е. $-ax^2+x-1=0$ или $ax^2+x-1=0$. Дискриминантата на първото уравнение е $D_1=1-4a>0$ и следователно то има два реални корена $x_1$ и

$x_2$. Нещо повече, тъй като от формулите на Виет $x_1.x_2 = \dfrac{1}{a} < 0$, то точно единия от тях е положителен. Така остава второто уравнение да има поне едно положително решение. Необходимо условие е $D_2 = 1 + 4a \geqq 0$, $a \geqq -\dfrac{1}{4}$. Освен това, ако $x_3$ е решение, то $x_3 = 1 - ax_3^2 > 0$ и следователно $a \geqq -\dfrac{1}{4}$ е достатъчно условие. Окончателно $a \in \left[-\dfrac{1}{4}, 0\right)$.

**Оценяване.** (6 точки) 1 т. за $a < 0$, 1 т. за освобождаване от модула и достигане до две квадратни уравнения; 1 т. за съображението, че едното винаги има две реални решения с противоположни знаци; 2 т. за съображението, че другото няма отрицателни решения; 1 т. за достигане до крайния отговор.

**Задача 10.2.** Нека $CD$ е височина в $\triangle ABC$, като $D \in AB$. Окръжността с център $C$ и радиус $CD$ пресича описаната около $\triangle ABC$ окръжност в точките $E$ и $F$ съответно. Ако правата $EF$ разполовява $CD$, то да се намери $\sphericalangle ACB$.




*Решение.* Нека правата $EF$ пресича $CA$, $CB$ и $CD$ в точките $P$, $Q$ и $M$ съответно. От

$$\sphericalangle CAE = \frac{1}{2}\,\overset{\frown}{CE} = \frac{1}{2}\,\overset{\frown}{CF} = \sphericalangle CEP$$

следва, че $\triangle CAE \sim \triangle CEP$. Тогава

$$CP.CA = CE^2 = CD^2 \Rightarrow DP \perp CA.$$

Аналогично $DQ \perp CB$ и следователно точките $D, Q, C$ и $P$ лежат на окръжност с диаметър $CD$. Но по условие $M$ е среда на $CD$, т.е. $M$ е центърът на тази окръжност и $\sphericalangle ACB = 90^\circ$.

**Оценяване.** (6 точки) 1 т. за построяване на точките $P$ и $Q$; 3 т. за $DP \perp CA$ и $DQ \perp CB$; 2 т. за $\sphericalangle ACB = 90^\circ$.

**Задача 10.3.** Да се намерят всички естествени числа $n$, за които

$$\varphi(n)/n \text{ и } \varphi(n + 2016)/(n + 2016).$$

(С $\varphi(n)$ означаваме броя на естествените числа, ненадминаващи $n$ и взаимнопрости с $n$.)

*Решение.* Ще докажем, че $\varphi(n)/n$ точно тогава, когато $n = 1$, $2^k$ или $2^k3^l$ за някои $k$ и $l \in \mathbb{N}$. Ако $n = 1$, то $\varphi(1) = 1$ и условието е изпълнено. Нека $n > 1$ и $p_1 < p_2 < \ldots < p_m$ са всичките му прости множители. Известно е, че $\varphi(n) = n\left(1 - \dfrac{1}{p_1}\right)\ldots\left(1 - \dfrac{1}{p_m}\right)$ и следователно

$$\varphi(n)/n \Leftrightarrow (p_1 - 1)\ldots(p_m - 1)/p_1\ldots p_m. \qquad (*)$$

- Ако $m = 1$, то $(p_1 - 1)/p_1$, което е изпълнено единствено при $p_1 = 2$.

- Ако $m = 2$, то $(p_1 - 1)(p_2 - 1)/p_1 p_2$ и понеже $2/(p_1 - 1)(p_2 - 1)$ следва, че $2/p_1 p_2$, т.е. $p_1 = 2$. Така $(p_2 - 1)/2p_2$, но $(p_2 - 1, p_2) = 1$ и единствената възможност е $p_2 = 3$.
- Ако $m \geqq 3$, то $4/(p_1 - 1) \dots (p_m - 1)$, т.е. $4/p_1 \dots p_m$, което е невъзможно.

Окончателно получаваме, че $\varphi(n)/n \Leftrightarrow n = 1$, $2^k$ или $2^k 3^l$ за някои $k$ и $l \in \mathbb{N}$. Аналогично от $\varphi(n + 2016)/n + 2016$ следва, че $n + 2016 = 2^p$ или $2^p 3^q$ за някои $p$ и $q \in \mathbb{N}$ и достигаме до уравнението

$$2^k 3^l + 2016 = 2^p 3^q, \qquad (**)$$

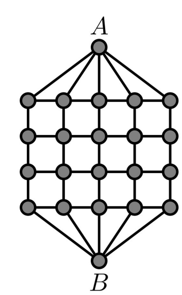
допускайки възможността $l$ и $q$ да са нули. Тъй като $2016 = 2^5 3^2 7$, то в горното равенство поне две от степените на тройката и поне две от степените на двойката са равни, т.е. $l = 2$, $q = 2$ или $l = q < 2$, както и $k = 5$, $p = 5$ или $k = p < 5$.

- Ако $l = 2$ и $k = 5$, достигаме до решението $n = 288$.
- Ако $l = 2$, $p = 5$ и $k > 5$, достигаме до уравнението $2^{k-5} + 7 = 3^{q-2}$, което по $\pmod 8$ има единствено решение $(k, q) = (6, 4)$, т.е. $n = 576$.
- Ако $l = 2$ и $k = p < 5$, то с изчерпване на четирите възможности не достигаме до решение.
- Ако $q = 2$ и $l > 2$, то $p > 5$ и следователно $k = 5$. Достигаме до уравнението $3^{l-2} + 7 = 2^{p-5}$, което по $\pmod 3$ и $\pmod 4$ ни води до извода, че $p - 5$ и $l - 2$ са четни числа. Тогава $7 = (2^{\frac{p-5}{2}} - 3^{\frac{l-2}{2}})(2^{\frac{p-5}{2}} + 3^{\frac{l-2}{2}})$ и достигаме до единствено решение $(l, p) = (4, 9)$, т.е. $n = 2592$.
- Ако $l = q < 2$, т.е. $l = q = 0$ или 1, то $p > 5$ и следователно $k = 5$. В този случай достигаме до единствено решение $p = 11$, $n = 32$.

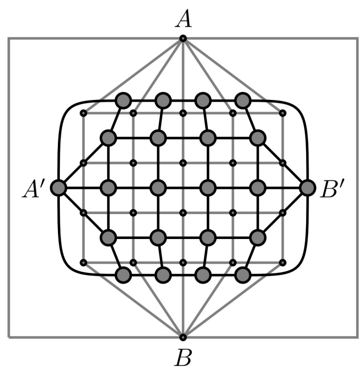
Окончателно търсените стойности за $n$ са 32, 288, 576 и 2592.

**Оценяване.** (6 точки) 1 т. за достигане до (*); 2 т. за достигане до (**); 1 т. за свеждане на задачата до разглежданите подслучаи; 3 т. за получаване на всички решения.

**Задача 10.4.** В един град има 22 площада, които са свързани с 41 улици както е показано на схемата вдясно. По колко начина можем да затворим някои от улиците, така че да съществува път от площад $A$ до площад $B$?



*Решение.* Дефинираме граф $G$ с върхове - площадите и ребра - свързващите улици. Да впишем това графично преставяне в правоъгълник, както е показано по-долу, и да дефинираме нов граф $G'$ с върхове - получените свързани области в правоъгълника, като две области са съседни, т.е. са свързани с ребро, точно тогава, когато те се разделят от общо ребро от $G$. Да забележим, че графите $G$ и $G'$ са еквивалентни (изоморфни).




Нека от графа $G$ са изтрити някои от ребрата и да означим получения граф с $H$. Да дефинираме $H'$ като изтрием от $G'$ ребрата, свързващи онези области, които се разделят от неизтрито ребро в $G$. Забелязваме, че е невъзможно да съществува едновременно път от $A$ до $B$ в $H$ и път от $A'$ до $B'$ в $H'$. От друга страна, е невъзможно да няма път от $A$ до $B$ в $H$ и едновременно да не съществува път от $A'$ до $B'$ в $H'$.
Така на всяко изтриване на ребра от $G$ съответства изтриване на ребра от $G'$. Ако при това се получава граф $H$, за който съществува път от $A$ до $B$, то това съответства на изтриване на ребра в $G'$, водещо до граф $H'$ без път от $A'$ до $B'$. Тъй като $G$ и $G'$ са изоморфни, то двете възможности се случват по равен брой пъти. Следователно търсеният брой е $2^{40}$.

**Оценяване.** (7 точки) 3 т. - за построяване на дуалния граф $G'$ и отбелязване на факта, че $G$ и $G'$ са изоморфни; 3 т. - за конструриране на съответствието $H$ – $H'$ и отбелязване на факта, че в $H$ съществува път от $A$ до $B$ точно тогава, когато в $H'$ не съществува път от $A'$ до $B'$; 1 т. за получаване на отговора.

**Задача 11.1.** Да се намери най-малката и най-голямата стойност на функцията:

$$f(x) = (\sin x + \cos x)(\sin x + \cos x + 1)(\sin x + \cos x + 2)(\sin x + \cos x + 3).$$

*Решение.* Полагаме $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$. Задачата се свежда до намиране на най-малката и най-голямата стойност на функцията $f(t) = t(t+1)(t+2)(t+3) = (t^2 + 3t)(t^2 + 3t + 2)$ за $t \in [-\sqrt{2}, +\sqrt{2}]$.
Функцията $y = t^2 + 3t$ е растяща за $t \in [-\sqrt{2}, +\sqrt{2}]$ (тъй като $-\frac{3}{2} > -\sqrt{2}$). Следователно $y_{min} = y(-\sqrt{2}) = 2 - 3\sqrt{2}$ $y_{max} = y(\sqrt{2}) = 2 + 3\sqrt{2}$.

Остава да намерим най-малката и най-голямата стойност на функцията $f(y) = (t^2+3t)(t^2+3t+2) = y^2+2y$ за $y \in [2-3\sqrt{2}, 2+\sqrt{2}]$. Тъй като $-1 \in [2-3\sqrt{2}, 2+\sqrt{2}]$, то $f_{min} = f(-1) = -1$. За най-голямата стойност имаме $f_{max} = f(2+3\sqrt{2}) = 26 + 18\sqrt{2}$.
**Оценяване.** (6 точки) 1 т. за полагането $\sin x + \cos x = t$; 1 т. за представянето $f(t) = t(t+1)(t+2)(t+3) = (t^2+3t)(t^2+3t+2)$; 2 т. за изследване на функцията $y = t^2 + 3t$; 2 т. за получаване на отговора.

**Задача 11.2.** Точка $M$ е среда на страната $AB$ на триъгълник $ABC$. Окръжността през точките $C$ и $M$, която се допира до страната $AB$ пресича страните $AC$ и $BC$ съответно в точките $P$ и $Q$. Ако $K$ и $L$ са среди съответно на $CP$ и $CQ$ да се докаже, че $\sphericalangle CKM = \sphericalangle CLM$.

*Решение.* Да означим с $D$ точката върху лъча $CM^{\to}$, за която $CM = MD$. Тогава $MK$ е средна отсечка в триъгълник $CPD$ и $ML$ е средна отсечка в триъгълник $CQD$. Следователно $\sphericalangle CKM = \sphericalangle CPD$ и $\sphericalangle CLM = \sphericalangle CQD$ и е достатъчно да докажем, че $\triangle APD \sim \triangle BQD$. Да забележиме, че $\sphericalangle PAD = \sphericalangle QBD$ като противоположни ъгли в успоредника $ADBC$. Освен това $AM^2 = AP.AC$ и $BM^2 = BQ.BC$, откъдето:

$$\frac{AP}{AD} = \frac{AM^2}{AC.AD} = \frac{BM^2}{BC.BD} = \frac{BQ}{BD}.$$

Следователно двата триъгълника са подобни, откъдето следва и твърдението на задачата.
**Оценяване.** (6 точки) 1 т. за разглеждане на точкатах $D$; 1 т. за свеждане на задача до $\triangle APD \sim \triangle BQD$; 4 т. за доказване на $\triangle APD \sim \triangle BQD$;

**Задача 11.3.** Нека $A = \{1, 2, 3, \dots, m+n\}$, където $m \geq 2$ и $n \geq 2$ са естествени числа. Да се намери броят на функциите $g : A \to A$, за които

$$g(g(i)) = i + 1 \text{ за } i = 1, 2, \dots, m-1, m+1, \dots, m+n-1;$$

$$g(g(m)) = 1 \text{ и } g(g(m+n)) = m+1.$$

*Решение.* Нека $A_m = \{1, 2, \dots, m\}$ и $A_n = \{m+1, m+2, \dots, m+n\}$. Ако $f(a) = g(g(a))$, то лесно се вижда, че $f$ е биекция и $f : A_n \to A_n$, $f : A_m \to A_m$. Ако $k \in A_m$, то $f(k) = k+1 \pmod m$ и ако $k \in A_n$, то $f(k) = k+1 \pmod n$. Лесно се проверява, че $g$ е биекция: ако $g(a_1) = g(a_2)$, то $g(g(a_1)) = g(g(a_2))$, т.е. $f(a_1) = f(a_2)$, противоречие. Освен това за всяко $a \in A$ е изпълнено $g(a) \neq a$. Да допуснем, че $m$ е четно число. Ще докажем, че ако $a \in A_m$, то $g(a) \in A_n$. Да допуснаме, че $g(1) = k \in A_m$. Нека $A_m = B \cup C$, където $B = \{1, 2, \dots, k-1\}$ и $C = \{k, k+1, \dots, m\}$.
1 случай. Нека $|B| = |C|$. Имаме $g(1) = k$, $g(k) = g(g(1)) = 2$, $g(2) = k+1$, $g(k+1) = 3$ и т.н. Ще достигнем до $g(k-1) = m$, $g(m) = k$, което противоречи на $g(1) = k$.
2 случай. Нека $|B| < |C|$. Достигаме до $g(k-1) = s < m$, $g(s) = k$, отново противоречие с $g(1) = k$.
3 случай. Нека $|B| > |C|$. Понеже $m$ е четно, то Нека $|B| \geq |C| + 2$. Аналогично ще получим $s \in B$, $s \leq k-3$, но тогава $s + 2 = k$, т.е. $s = k-2$, противоречие.

Аналогични разсъждения показват, че ако $m$ е нечетно число и $a \in A_m$ е такова, че $g(a) \in A_m$, то Нека $|B| = |C| + 1$ и тогава за всяко $a \in A_m$, $g(a) \in A_m$, по точно ако $m = 2k+1$, то $g(a) = a + k + 1$ по модул $m$.
Когато $m$ е четно, за да съществува $g$ лесно се вижда, че това ще е възможно при $n = m = 2k$ и тогава имаме $m$ броя функции:

$$g : A_m \to A_n, g(a) = 2k + a, a = 1, 2, \dots 2k$$

$$g : A_n \to A_m, \text{ при } a = 2k + r, g(a) = g(2k + r) = r + 1 \text{ по модул } 2k, a = 1, 2, \dots 2k.$$

Окончателно:
**I случай.** $m$ и $n$ нечетни
1. При $m \neq n$ имаме само една функция като в примера в 3 случай по-горе.
2. При $m = n$ имаме $n + 1$ функции: една функция като в пример 3 и още $n$ като другия пример.
**II случай.** $m$ и $n$ четни и $m = n$
Тогава имаме $n$ функциии.
Във всички други случаи за $m$ и $n$ функцията $g$ не съществува.
**Оценяване.** (7 точки) 1 т. за разглеждане на функцията $f(a) = g(g(a))$; 1 т. за разглеждане на множествата $B$ и $C$; по 1 т. за всеки от трите случая; 2 т. за довършване на решението.

**Задача 11.4.** Виж зад. 12.4.

**Задача 12.1.** За редиците $a_1, a_2, \dots$ и $b_1, b_2, \dots$ от положителни реални числа са в сила равенствата

$$2a_{n+1} = a_n + b_n, \quad 2b_{n+1} = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n}, \quad n \geq 1.$$

Да се докаже, че редиците са сходящи и да се намерят границите им.

*Решение.* От неравенството между СА и СХ следва, че $a_{n+1}b_{n+1} \geq 1$. Тогава

$$2b_{n+2} = \frac{a_{n+1} + b_{n+1}}{a_{n+1}b_{n+1}} \leq a_{n+1} + b_{n+1} = 2a_{n+2},$$

откъдето $2a_{n+3} = a_{n+2} + b_{n+2} \leq 2a_{n+2}$. Значи редицата $a_3, a_4, \dots$ е монотононно намаляваща и ограничена отдолу (от 0), и следователно е сходяща. Ако $l$ е нейната граница, от първото равенство следва, че $b_n \to l$. Сега от второто равенство получаваме, че $l = \dfrac{1}{l}$ и понеже $l > 0$, то $l = 1$.

**Оценяване.** (6 точки) 1 т. за $a_{n+1}b_{n+1} \geq 1$, 1 т. за $a_{n+2} \geq b_{n+2}$, 1 т. за $a_{n+2} \geq a_{n+3}$, 1 т. за $a_n \to l$, 1 т. за $b_n \to l$ и 1 т. за $l = 1$.
**Задача 12.2.** Права през точката $A(1, 1)$ пресича правата $y = -19$ в точка $B$ и параболата $y = x^2$ в точка $C$ ($C \neq A$). Да се докаже, че $|BC| > 10\sqrt{5}$.

*Решение.* Можем да запишем уравнението на правата във вида $y=(a+1)x-a$ ($a\neq\pm1$; иначе $C=A$ или $B=\infty$). Тогава $B\left(\dfrac{a-19}{a+1},-19\right)$, $C(a,a^2)$ и

$$BC^2=\left(\frac{a-19}{a+1}-a\right)^2+(19+a^2)^2=(a^2+19)^2\left(\frac{1}{(a+1)^2}+1\right)=:f(a).$$

При $g(a)=2a^3+8a^2+15a+19$ имаме, че $f'(a)\overset{\circ}{=}2\dfrac{a^2+19}{(a+1)^3}(a-1)g(a)$. Понеже $g'(a)=6a^2+16a+15>0$ за всяко $a$, то $g(a_0)=0$ за единствено $a_0$. Сега лесно се съобразява, че $\min f\triangleq\min\{f(1),f(a_0)\}$. Тъй като $g(-2)=3>0$, то $a_0<-2$ и значи $f(a_0)>23^2>500=f(1)$. Следователно $f(a)>500$ при $a\neq\pm1$, откъдето $|BC|>10\sqrt{5}$.
**Забележка.** Решението може са довърши, като се покаже, че

$$(a^2+19)^2((a+1)^2+1)\geq 500(a+1)^2.$$

При $h(a)=a^4+4a^3+47a^2+166a+222$ това е еквивалентно на (*) $(a-1)^2h(a)\geq 0$. Остава да съобразим, че $h(a)=a^2(a+2)^2+q(a)$, където $q(a)=43a^2+166a+222$ и $D_q<0$.

**Оценяване.** (6 точки) 2 т. за $BC^2=f(a)$, 2 т. за $\overset{\circ}{=}$ или (*), и 2 т. за довършване (1 т. за $\triangleq$).

**Задача 12.3.** Даден е тетраедър $ABCD$ и вътрешна за него точка $O$. Означаваме с $d_1,d_2,d_3$ и $d_4$ разстоянията от $O$ съответно до върховете $A$, $B$, $C$ и $D$ и с $k_1,k_2,k_3$ и $k_4$ разстоянията от точка $O$ съответно до стените $BCD$, $ACD$, $ABD$ и $ABC$. Да се докаже, че:

$$d_1+d_2+d_3+d_4\geq 2(\sqrt{k_1k_2}+\sqrt{k_1k_3}+\sqrt{k_1k_4}+\sqrt{k_2k_3}+\sqrt{k_2k_4}+\sqrt{k_3k_4}).$$

Кога се достига равенство?

*Решение.* Първо забелязваме, че имаме $d_i+k_i\geq h_i$, където $h_i$ е съответната височина. Ако означим с $S_i$ лицата на съответните стени и сравнявайки обемите получаваме, че

$$(d_i+k_i)S_i\geq h_iS_i=\sum_{j=1}^{4}(k_jS_j).$$

Расписвайки тези неравенства за всяко $i=1,\dots,4$ получаваме:

$$d_1\geq\frac{S_2}{S_1}k_2+\frac{S_3}{S_1}k_3+\frac{S_4}{S_1}k_4$$

$$d_2\geq\frac{S_1}{S_2}k_1+\frac{S_3}{S_2}k_3+\frac{S_4}{S_2}k_4$$

$$d_3\geq\frac{S_1}{S_3}k_1+\frac{S_2}{S_3}k_2+\frac{S_4}{S_3}k_4$$

$$d_4\geq\frac{S_1}{S_4}k_1+\frac{S_2}{S_4}k_2+\frac{S_3}{S_4}k_3$$

Сумирайки горните неравенства получаваме

$$\sum_{i=1}^{4} \geq \sum_{i,j=1,i\neq j}^{4} (\frac{S_i}{S_j}k_i + \frac{S_j}{S_i}k_j).$$

От тук прилагайки неравенството между СА и СГ за всяко събираемо от дясната страна на горното неравенство $\frac{S_i}{S_j}k_i + \frac{S_j}{S_i}k_j \geq 2\sqrt{k_ik_j}$, получаваме исканото в задачата неравенство. От горните редове следва, че за случая на равенство трябва да имаме равенство във всички използвани неравенства. От тук следва, че $ABCD$ е ортогонален тетраедър, т. е. височините му се пресичат в една точка. От там след геометрични аргументи следва, че $ABCD$ е правилен и $O$ е неговия център.

**Оценяване.** (7 точки) Асоциация с неравенството на Ердьош-Мордел в равнината, без никакъв опит да се излезе в тримерното пространство или пък обобщение без аргументи носи 0 точки. Идея да се използват височините за неравенствата без да се достигне до сравняване на обемите, носи 2 точки. Използване на обемите без да се докаже крайното неравенство, носи 3 или 4 точки в зависимост от дълбочината до която се е достигнало. Доказателство на неравенството носи 5 точки. Обосновани аргументи за това кога се достига равенство носят пълен брой точки(7).

**Задача 12.4.** Нека $a$ и $b$ са такива естествени числа, че $p = a^2 + b^2$ е просто число. Да се докаже, че съществуват безбройно много естествени числа $n$, за които $p$ дели $(a^n + a + b^n + b)((ab)^n + 1)$

**Решение.** От равенството

$$a^{k+2} + b^{k+2} = (a^2 + b^2)(a^k + b^k) - (ab)^2(a^{k-2} + b^{k-2})$$

с индукция по $k \in \mathbb{N}_0$ следва, че

$$a^{8k+3} + b^{8k+3} \mathrel{\mathring{=}} pP_k(a, b) - (ab)^{4k+1}(a + b),$$

където $P_k(a, b)$ е полином с цели коефициенти.

Нека $m$ е показателят на $ab$ по модул $p$. Ако $m$ е нечетно число, то всяко $n = 2(4i+1)m^2+1$ върши работа. Ако $m = 2l$ е четно число, то $p$ дели $(ab)^l+1$ (защо?) и значи всяко $n = (2i+1)l$ върши работа.

*Забележка.* Твърдението на задачата остава вярно ако множителят $(ab)^n + 1$ се замени с $(ab)^{4n+2} + 1$.

**Оценяване.** 3 т. за $\mathring{=}$ и по 2 т. за двата случая за $m$.

**Задачите са предложени от:** 8.1, 8.2, 8.3, 8.4 – Иван Тонов; 9.1, 9.2 – Диана Данова; 9.3 – Ивайло Кортезов; 9.4 – Васил Василев, 10.1 – Емил Карлов, 10.2, 10.3 – Стоян Боев, 10.4 – Иван Ланджев, 11.1, 11.3 – Александър Иванов, 11.2 – Мирослав Маринов, 12.1, 12.2, 12.4 (11.4) – Николай Николов, 12.3 – Драгомир Драгнев.